# Notation scientifique

**Théorème**

Pour tout nombre décimal $x$ non nul, il existe un unique entier relatif $p$ et un unique nombre décimal $a$ vérifiant $-10 < a \leq -1$ ou $1 \leq a < 10$ tels que $x = a \times 10^p$.

**Définition**

L'écriture $x = a \times 10^p$ est appelée **écriture de $x$ en notation scientifique**.

# Valeurs approchées

Soit $x$ et $y$ deux nombres réels, $n$ un entier relatif.

- $y$ est une **valeur approchée de $x$ à $10^n$ près** si $|x - y| \leq 10^n$. Alors $x \in \left[y - 10^n \,;\, y + 10^n\right]$.
- $y$ est une **valeur approchée de $x$ à $10^n$ près par défaut** si $y \leq x \leq y + 10^n$. Alors $x \in \left[y \,;\, y + 10^n\right]$.
- $y$ est une **valeur approchée de $x$ à $10^n$ près par excès** si $y - 10^n \leq x \leq y$. Alors $x \in \left[y - 10^n \,;\, y\right]$.

# Valeurs approchées décimales

Soit $x$ un nombre réel, il existe deux entiers relatifs $k$ et $n$ vérifiant $k \times 10^{-n} \leq x < (k+1) \times 10^{-n}$.

$k \times 10^{-n}$ est l'**approximation décimale de $x$ par défaut à l'ordre $n$**.

$(k+1) \times 10^{-n}$ est l'**approximation décimale de $x$ par excès à l'ordre $n$**.

# Arrondis

Pour arrondir un nombre réel $x$, on tronque la suite décimale de $x$ et on obtient une troncature de $x$ :

- Si le premier chiffre à supprimer est 0, 1, 2, 3 ou 4, on ne fait rien et l'arrondi de $x$ est sa troncature.
- Si le premier chiffre à supprimer est 6, 7, 8 ou 9, on augmente le dernier chiffre de la troncature de 1 pour obtenir l'arrondi de $x$.
- Si le premier chiffre à supprimer est 5, plusieurs cas se présentent :
  - Si le dernier chiffre de la troncature est pair et qu'il n'y a aucun chiffre suivant le 5, ou seulement des 0, l'arrondi de $x$ est sa troncature.
  - Dans les autres cas, on augmente le dernier chiffre de la troncature de 1 pour obtenir l'arrondi de $x$.

**Exemples :** On souhaite écrire les nombres suivants avec 3 chiffres significatifs :

15,632 est arrondi à 15,6 à l'ordre 1.

5,685 64 est arrondi à 5,69 à l'ordre 2.

7,638 54 est arrondi à 7,64 à l'ordre 2.

5,615 28 est arrondi à 5,62 à l'ordre 2.

5,685 00 est arrondi à 5,68 à l'ordre 2.

# Chiffres significatifs

**Langage *vie quotidienne***

**Exemple :**

Quand on dit "À Toulouse en février 2009, il y avait 440 000 habitants", il n'y avait sans doute pas exactement 440 000 habitants : c'est un ordre de grandeur, un *arrondi pratique*. tous les chiffres ne sont pas significatifs.

En réalité, il y avait 437 715 habitants en février 2009.

En physique, on verra qu'on peut résoudre en partie ce problème avec la notation scientifique (puissance de 10). Dans ce cadre et par convention, les deux écritures $4{,}400\,00 \times 10^5$ et 440 000 ne sont pas équivalentes même s'il s'agit du même nombre.

**Définition**

Tous les chiffres écrits dans la donnée d'une mesure ou dans le résultat d'un calcul sauf les « zéros » placés à gauche sont appelés chiffres significatifs.

Pour des nombres correspondants à des constantes ou à des nombres connues avec certitude, il y a une infinité de chiffres significatifs.

Par la suite "chiffre significatif" sera noté CS.

**Exemples**

| **Données** | **Chiffres significatifs (CS)** | **Nombre de CS** |
|---|---|---|
| 67,043 | 6 7 0 4 3 | 5 |
| 0,054 | 5 4 | 2 |
| 6,0 | 6 0 | 2 |
| 0,520 0 | 5 2 0 0 | 4 |
| $1{,}05 \times 10^{-1}$ | 1 0 5 | 3 |
| $6{,}50 \times 10^{-1}$ | 6 5 0 | 3 |
| $4{,}400\,00 \times 10^{5}$ | 4 4 0 0 0 0 | 6 |
| $\pi$ | 3 1 4 1 5 9 2 7 … | une infinité |
| 4 (constante) | 4 0 0 0 0 0 …ou 3 9 9 9 9 9 … | une infinité |

**Exemples :**

Dans un panier, il y a 5 pommes. Il n'y a pas d'erreur sur le 5. Une infinité de CS.

Par définition 1 $m^3$ = 1 000 L. Il n'y a pas d'erreur sur 1 000. Une infinité de CS.

La notion de chiffre significatif est utilisée, en particulier, dans l'interprétation des résultats de mesures. Ainsi, lorsqu'on donne le résultat d'une mesure sous la forme $6{,}704\,3 \times 10$, on convient implicitement que la valeur mesurée est comprise entre 67,042 5 et 67,043 5.

**Applications aux calculs**

Il existe plusieurs méthodes pour exprimer le résultat d'un calcul faisant intervenir un ou plusieurs résultats de mesures :

- la méthode des CS
- la méthode des sommes d'incertitudes
- la méthode des extrêmes
- la méthode du calcul différentiel

Détaillons la méthode des chiffres significatifs qui est la plus simple..

**a) Addition ou soustraction.**

Le résultat final d'une addition ou d'une soustraction de nombres écrits uniquement avec des chiffres significatifs, est donné avec le même nombre de **chiffres décimaux** que le terme de l'opération qui en a le moins.

| **Addition ou soustraction** | **Le résultat final doit respecter la règle d'arrondi et être donné avec :** | **Résultat** |
|---|---|---|
| 5,101 + 14,28 = 19,381 | 2 chiffres décimaux | 19,38 |
| 162,4 – 17,842 = 144,558 | 1 chiffre décimal | 144,6 |
| $\pi - 2{,}23 = 0{,}911\,59\ldots$ | 2 chiffres décimaux | 0,91 |

**Remarque :**

La valeur donnée pour une somme de deux mesures ne vérifient pas obligatoirement l'inégalité déduite des chiffres significatifs.

**Exemple :**

Prenons $a = 19{,}2062$ dont une mesure est 19,21.

$b = 20{,}9086$ dont une mesure est 20,91.

$a + b = 40{,}1148$ dont la valeur calculée est 40,12 (deux chiffres décimaux)

et on n'a pas $40{,}115 \leq a + b < 40{,}125$.

**b) Multiplication ou division.**

Le résultat final d'une multiplication ou d'une division de nombres écrits uniquement avec des chiffres significatifs, est donné avec le même nombre de **chiffres significatifs** que le facteur de l'opération qui en a le moins.

| **Multiplication ou division** | **Le résultat final doit respecter la règle d'arrondi et être donné avec :** | **Résultat** |
|---|---|---|
| $9{,}42 \times 2{,}023\,6 = 19{,}062\,312$ | 3 chiffres significatifs | 19,1 |
| $\frac{5{,}246}{1{,}20} = 4{,}371\,666\ldots$ | 3 chiffres significatifs | 4,37 |

**Remarque :**

La valeur donnée pour un produit de deux mesures ne vérifient pas obligatoirement l'inégalité déduite des chiffres significatifs.

**Exemple :**

Prenons a = 10,3262 dont une mesure est 10,33.

b = 11,99361 dont une mesure est 11,994.

a b = 123,8484156 dont la valeur calculée est 123,89802 évaluée par 123,9 (4 chiffres significatifs)

et on n'a pas $123{,}85 \leq a\,b < 123{,}95$.

**c) Logarithmes**

Le logarithme népérien d'un nombre écrit uniquement avec des chiffres significatifs a le même nombre de chiffres significatifs que son argument.

$\ln(37{,}5) = 3{,}624\,340\ldots$ donc $\ln(37{,}5) = 3{,}62$.

Attention avec le logarithme décimal :

$4{,}5 \times 10^{3}$ et $4{,}5 \times 10^{4}$ ont chacun 2 CS.

$\log 4{,}5 = 0{,}653\,2\ldots$ Ainsi $\log(4{,}5 \times 10^{3}) = 3{,}653\,2\ldots$ et $\log(4{,}5 \times 10^{4}) = 4{,}653\,2\ldots$

La partie entière du logarithme décimal d'un nombre n'est que la valeur de l'exposant de 10 dans l'écriture scientifique du nombre. Cette valeur ne sert qu'à positionner la virgule, elle n'est pas elle-même un CS.

Le nombre de chiffres décimaux d'un logarithme décimal d'une donnée est le nombre de chiffres significatifs de la donnée.

Par conséquent, il faut écrire : $\log 4{,}5 = 0{,}65$, $\log(4{,}5 \times 10^{3}) = 3{,}65$ et $\log(4{,}5 \times 10^{4}) = 4{,}65$.

Pour s'en convaincre : $\log 0{,}05 = -1{,}301\,0\ldots$ Si on applique mal la règle, on aurait : $\log 0{,}05 = -1$. L'écriture correcte est : $\log 0{,}05 = -1{,}3$.

**d) Exponentielles**

Le nombre de CS ne change pas.

$e^{6,45} = 632{,}702\,2\ldots$ donc $e^{6,45} = 633$

**e) Puissances de 10**

Le résultat a autant de CS que l'exposant a de décimales.

| **Puissances de 10** | **Le résultat final doit respecter la règle d'arrondi et être donné avec :** | **Résultat** |
|---|---|---|
| $10^{1,12} = 13{,}182\,5\ldots$ | 2 chiffres significatifs | 13 |
| $10^{-5,1} = 7{,}943\,2\ldots \times 10^{-6}$ | 1 chiffre significatif | $8 \times 10^{-6}$ |
| $10^{2,62} = 416{,}869\,3\ldots$ | 2 chiffres significatifs | $4{,}2 \times 10^{2}$ |