LOIS NORMALES ET AUTRES LOIS DÉRIVÉES

I - Variables aléatoires

(Ω, P) est un espace probabilisé.

1°) - Définition

Une **variable aléatoire réelle** (v.a.r.) X sur Ω est une application de Ω dans $\mathbb{R}$.

L'**univers image** par X est l'ensemble des images des éléments de Ω par X, ou l'ensemble image de X, ou l'ensemble des valeurs prises par X, on le note $X(\Omega)$. On le note $X(\Omega)$. S'il est dénombrable, la variable aléatoire X est dite **discrète**, dans le cas contraire, elle est dite **continue**.

Exemple

On considère un population dans laquelle 25% des individus ont une propriété C. On constitue un échantillon de taille 30 au hasard dans cette population où chaque individu a la même probabilité d'être choisi et on s'intéresse au nombre n d'individus de l'échantillon ayant la propriété C.

Ω est l'ensemble des échantillons de taille 30 de la population. P est l'équiprobabilité.

X est l'application qui a chaque échantillon associe son nombre d'individus ayant la propriété C.

$X(\Omega)$ est $\{0, 1, 2, ..., 30\}$.

2°) - Loi de probabilité

X est une variable aléatoire définie sur Ω.

La **loi de probabilité** (ou distribution) de X est la probabilité P_0 définie sur $X(\Omega)$ par :

$$P_0(B) = P\left(X^{-1}(B)\right) = P(X \in B) \text{ pour tout } B \text{ est un intervalle de } X(\Omega).$$

Exemple

$X(\Omega) = \{0, 1, 2, ..., 30\}$.

Par exemple, $P_0(\{5\})$ est la probabilité de l'ensemble des échantillons comportant 5 individus ayant la propriété C.

La loi de X est la loi binomiale de paramètre 30 et 0,25.

$P_0(\{5\}) = P(X = 5) = \binom{30}{5} \times 0{,}25^5 \times 0{,}75^{25} \approx 0{,}105$.

3°) - Fonction de répartition

a) - Définition

La **fonction de répartition** de X est l'application numérique F définie par :

$$F(x) = P_0(]-\infty, x]) = P\left(X \in]-\infty, x]\right) = P\left(X \leq x\right).$$

b) - Propriétés

- La fonction de répartition est positive.
- La fonction de répartition est croissante.
- La fonction de répartition a pour limite 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$.

– Pour tous réels a et b tels que $a \leq b$, $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$.

II - Variables aléatoires continues

Dans ce paragraphe, X est une v.a.r. continue sur Ω.

I - Généralités

1°) - Densité

a) - Définition

On détermine la loi de probabilité de certaines variables aléatoires continues par leur **densité**. C'est une fonction f intégrable sur $\mathbb{R}$, telle que $f \geq 0$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

$$F(x) = P(]-\infty, x]) = P(X \in]-\infty, x]) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

b) - Propriétés

– Si f est continue sur $\mathbb{R}$, F est une primitive de f.

– Pour tous a et b réels tels que $a \leq b$: $P[a < X \leq b] = F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$.

2°) - Espérance

a) - Définition

L'espérance mathématique de la variable aléatoire réelle X de densité f est : $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f(t)\,\mathrm{d}t$.

b) - Propriétés

a et b sont des réels, X et Y sont des variables aléatoires sur (Ω, P).

– $E(a\,X + b\,Y) = a\,E(X) + b\,E(Y)$.

– $E(a) = a$.

3°) - Écart-type

a) - Définitions

La variance de la variable aléatoire réelle X de densité f est : $V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - E(X))^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ et son écart type est $\sigma = \sqrt{V(X)}$.

b) - Propriétés

Formule de Koenig : $V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t - (E(X))^2$.

Liens avec les opérations : a et b sont des réels, X est une variable aléatoire sur (Ω, P).

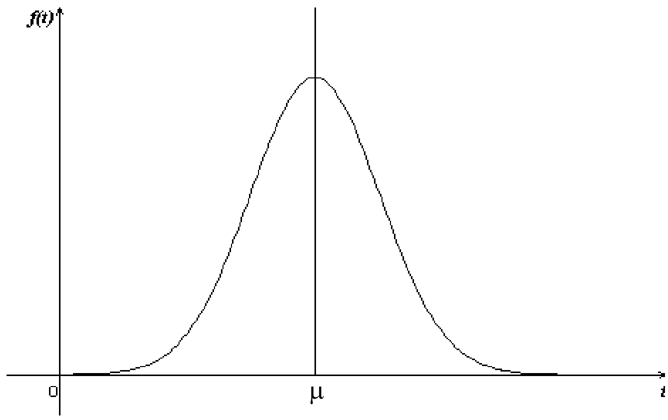
$V(aX + b) = a^2\, V(X)$ et $\sigma(aX + b) = |a|\, \sigma(X)$.

III - Lois normales et autres lois dérivées

1°) - Définition

On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi normale** de paramètres μ et σ, notée $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, si elle admet pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



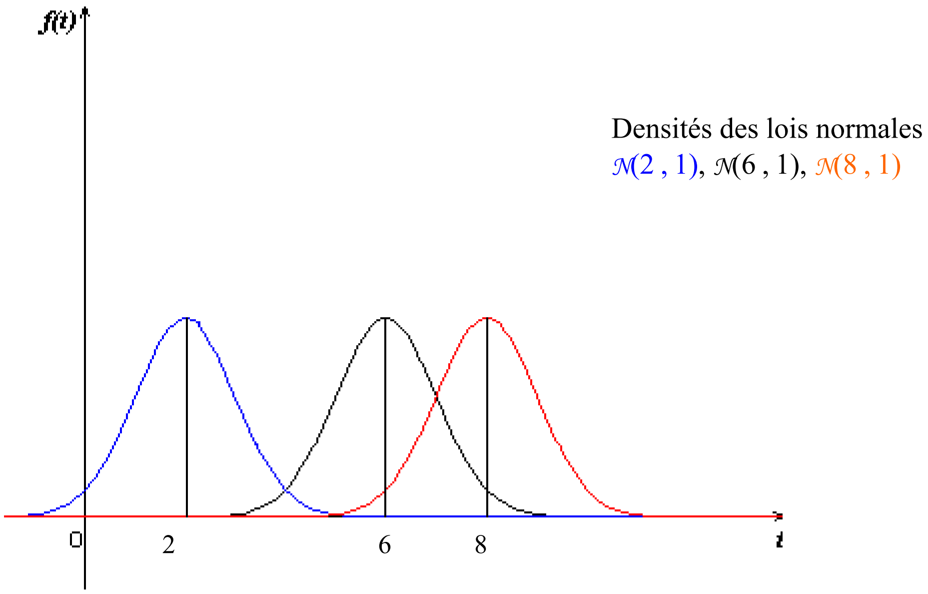
Remarque

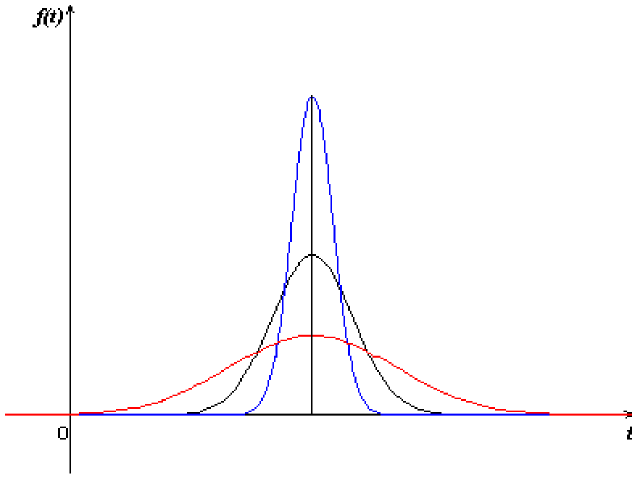
Les lois normales interviennent très souvent et en particulier lorsque le phénomène étudié est la résultante de nombreuses composantes aléatoires indépendantes (<u>industrie</u> : diamètres de pièces usinées qui sont la résultante de la qualité des matières premières, du réglage de la machine, de l'usure de l'outil, de la température...).

b) - Propriétés

L'espérance mathématique de X est $\mathrm{E}(X) = \mu$. Sa variance est $\mathrm{V}(X) = \sigma^2$ et donc son écart type est σ.

Ainsi si $\mu = 0$ et $\sigma = 1$, X suit la loi normale centrée réduite.





Densités des lois normales
$\mathcal{N}(6\,,0{,}5)$, $\mathcal{N}(6\,,1)$, $\mathcal{N}(6\,,2)$,

c) - Théorème 1

Soit X une variable aléatoire réelle suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu_X\,;\sigma_X)$ et soit a et b deux réels.

$a\,X+b$ est une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(a\,\mu_X+b\,;|a|\,\sigma_X)$).

d) - Conséquence

Si une variable aléatoire réelle X suit la loi normale de paramètres μ et σ, alors $\frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.

Ce résultat est important car il déduit l'étude des lois normales de celle de la loi normale centrée, réduite.

e) - Théorème 2

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes suivant les lois normales $\mathcal{N}(\mu_X\,;\sigma_X)$ et $\mathcal{N}(\mu_Y\,;\sigma_Y)$ respectivement.

$X+Y$ est une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu_X+\mu_Y\,;\sqrt{\sigma_X^{\,2}+\sigma_Y^{\,2}}\right)$.

f) - Théorème 3

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles suivant des lois normales. X et Y sont indépendantes si et seulement si la covariance $\mathrm{Cov}(X\,,Y)$ de X et Y est nulle.

Remarque

La condition $\mathrm{Cov}(X\,,Y)=0$ est nécessaire mais non suffisante dans le cas de variables aléatoires quelconques.

2 - Lois du Khi-deux (de Pearson)

a) - Définition

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, ..., X_n n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon la loi normale centrée réduite. La variable $Y_n=\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ suit la **loi du Khi-deux** à n degrés de liberté.

b) - Propriétés

L'espérance de Y_n est n et sa variance est $2n$.

c) - Théorème 8 de Fisher

Si n variables aléatoires indépendantes suivent des lois de χ^2, alors leur somme suit la loi de χ^2 avec comme nombre de degrés de liberté, la somme des nombres de degrés de liberté des n variables.

d) - Théorème 9

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, ..., X_n$ n variables aléatoires indépendantes suivant la même loi, normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

Posons $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $\hat{S}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \overline{X}\right)^2$, variance corrigée d'échantillon.

alors $\frac{(n-1)\,\hat{S}^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \overline{X}\right)^2}{\sigma^2}$ suit la loi du Khi-deux à n–1 degré de liberté χ^2_{n-1}.

3 - Lois de Student

a) - Définition

$n \in \mathbb{N}^*$. Soit les variables aléatoires X de loi normale centrée réduite et Y de loi du Khi-deux à n degrés de liberté.

Si X et Y sont indépendantes, $T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$ suit la **loi de Student** à n degrés de liberté.

b) - Propriétés

L'espérance de T est 0 et sa variance est $\frac{n}{n-2}$ lorsque $n > 2$.

c) - Théorème 10

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, ..., X_n$ n variables aléatoires indépendantes suivant la même loi, normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

Posons $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $\hat{S}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \overline{X}\right)^2$, variance corrigée d'échantillon.

$\frac{\overline{X} - \mu}{\hat{S}/\sqrt{n}}$ suit la loi de Student à n–1 degrés de liberté

4 - Lois de Fisher-Snédécor

a) - Définition

n_1 et n_2 désignent des entiers naturels non nuls.

Soit Z_1 et Z_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois du Khi-deux à n_1 et n_2 degrés de liberté respectivement, alors $F = \frac{\frac{Z_1}{n_1}}{\frac{Z_2}{n_2}}$ suit la **loi de Fisher-Snédécor** à n_1 et n_2 degrés de liberté

b) - Théorème 11

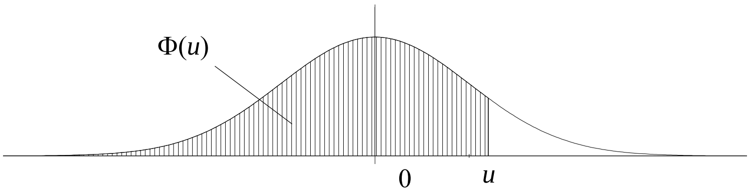
Soit $X_1, X_2, ..., X_{n_1}, Y_1, Y_2, ..., Y_{n_2}$ n_1+n_2 variables aléatoires indépendantes distribuées selon les lois normales $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X)$ pour les X_i $(1 \leq i \leq n_1)$ et $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y)$ pour les Y_j, $(1 \leq j \leq n_2)$ où μ_X et μ_Y sont des réels et σ_X et σ_Y des réels strictement positifs.

$F = \frac{\hat{S}_X^2}{\hat{S}_Y^2} \times \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2}$ suit la loi de Fisher-Snédécor à n_1–1 et n_2–1 degrés de liberté où $\hat{S}_X$ et $\hat{S}_Y$ sont les variables aléatoires égales aux écarts-types corrigés des X_i, $1 \leq i \leq n_1$, et des Y_j respectivement, $1 \leq j \leq n_2$.

Loi normale centrée réduite

U est une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

Le tableau donne des valeurs de la fonction de répartition Φ de *U* : $\Phi(u) = P(U \leq u)$:



u	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

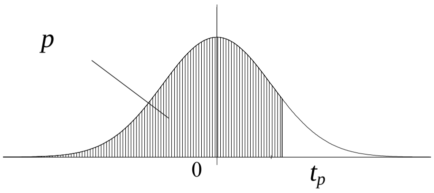
Grandes valeurs de *u*

u	3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	4	4,5
$\Phi(u)$	0,998650	0,999032	0,999313	0,999517	0,999663	0,999767	0,999841	0,999892	0,999928	0,999968	0,999997

Loi de Student-Fisher à *k* degrés de liberté

T est une variable aléatoire de loi de Student à *k* degrés de liberté.

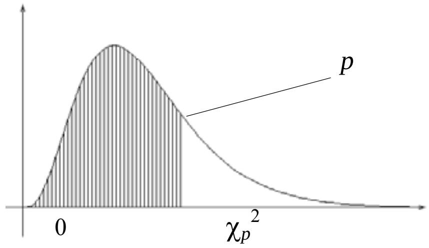
Pour chaque valeur de *p*, le tableau donne la valeur de t_p telle que $P(T \leq t_p) = p$.



$k \backslash p$	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999	0,9995
1	3,08	6,31	12,71	31,82	63,66	318,29	636,58
2	1,89	2,92	4,30	6,96	9,92	22,33	31,60
3	1,64	2,35	3,18	4,54	5,84	10,21	12,92
4	1,53	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	1,48	2,02	2,57	3,36	4,03	5,89	6,87
6	1,44	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,41	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,41
8	1,40	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,38	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,37	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,36	1,80	2,20	2,72	3,11	4,02	4,44
12	1,36	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,35	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,35	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,34	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,34	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,33	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,97
18	1,33	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,33	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,33	1,72	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,32	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,32	1,72	2,07	2,51	2,82	3,50	3,79
23	1,32	1,71	2,07	2,50	2,81	3,48	3,77
24	1,32	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,75
25	1,32	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,73
26	1,31	1,71	2,06	2,48	2,78	3,43	3,71
27	1,31	1,70	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,31	1,70	2,05	2,47	2,76	3,41	3,67
29	1,31	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,31	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
35	1,31	1,69	2,03	2,44	2,72	3,34	3,59
40	1,30	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
45	1,30	1,68	2,01	2,41	2,69	3,28	3,52
50	1,30	1,68	2,01	2,40	2,68	3,26	3,50
60	1,30	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
80	1,29	1,66	1,99	2,37	2,64	3,20	3,42
100	1,29	1,66	1,98	2,36	2,63	3,17	3,39
200	1,29	1,65	1,97	2,35	2,60	3,13	3,34
500	1,28	1,65	1,96	2,33	2,59	3,11	3,31
1 000	1,28	1,65	1,96	2,33	2,58	3,10	3,30
10 000	1,28	1,65	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29

Loi du Khi-2

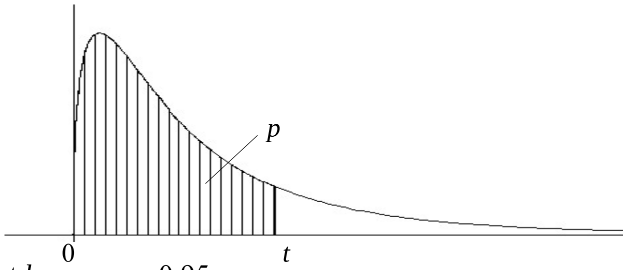
χ^2 est une variable aléatoire de loi de Khi-2 à k degrés de liberté.
Pour chaque valeur de p, le tableau donne la valeur de χ_p^2 telle que $P(\chi^2 \leq \chi_p^2) = p$.



k\p	0,005	0,01	0,025	0,05	0,1	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995
1	0,000	0,000	0,001	0,004	0,02	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,01	0,02	0,05	0,10	0,21	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60
3	0,07	0,11	0,22	0,35	0,58	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84
4	0,21	0,30	0,48	0,71	1,06	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86
5	0,41	0,55	0,83	1,15	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75
6	0,68	0,87	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55
7	0,99	1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09	21,95
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	17,28	19,68	21,92	24,73	26,76
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,09	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,86	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16
19	6,84	7,63	8,91	10,12	11,65	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58
20	7,43	8,26	9,59	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00
21	8,03	8,90	10,28	11,59	13,24	29,62	32,67	35,48	38,93	41,40
22	8,64	9,54	10,98	12,34	14,04	30,81	33,92	36,78	40,29	42,80
23	9,26	10,20	11,69	13,09	14,85	32,01	35,17	38,08	41,64	44,18
24	9,89	10,86	12,40	13,85	15,66	33,20	36,42	39,36	42,98	45,56
25	10,52	11,52	13,12	14,61	16,47	34,38	37,65	40,65	44,31	46,93
26	11,16	12,20	13,84	15,38	17,29	35,56	38,89	41,92	45,64	48,29
27	11,81	12,88	14,57	16,15	18,11	36,74	40,11	43,19	46,96	49,65
28	12,46	13,56	15,31	16,93	18,94	37,92	41,34	44,46	48,28	50,99
29	13,12	14,26	16,05	17,71	19,77	39,09	42,56	45,72	49,59	52,34
30	13,79	14,95	16,79	18,49	20,60	40,26	43,77	46,98	50,89	53,67
35	17,19	18,51	20,57	22,47	24,80	46,06	49,80	53,20	57,34	60,27
40	20,71	22,16	24,43	26,51	29,05	51,81	55,76	59,34	63,69	66,77
50	27,99	29,71	32,36	34,76	37,69	63,17	67,50	71,42	76,15	79,49
60	35,53	37,48	40,48	43,19	46,46	74,40	79,08	83,30	88,38	91,95
70	43,28	45,44	48,76	51,74	55,33	85,53	90,53	95,02	100,43	104,21
80	51,17	53,54	57,15	60,39	64,28	96,58	101,88	106,63	112,33	116,32
90	59,20	61,75	65,65	69,13	73,29	107,57	113,15	118,14	124,12	128,30
100	67,33	70,06	74,22	77,93	82,36	118,50	124,34	129,56	135,81	140,17

Loi F de Snédécor

Si X suit la loi F de Snédécor à k_1 et k_2 degrés de liberté, $P(X \le t) = p$.



Le tableau ci-dessous donne les valeurs de t en fonction de k_1 et k_2 pour $p = 0{,}95$.

$k_2 \backslash k_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	40	50	100	200	500	1 000
1	161,45	199,50	215,71	224,58	230,16	233,99	236,77	238,88	240,54	241,88	245,95	248,02	250,10	251,14	251,77	253,04	253,68	254,06	254,19
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,43	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49	19,49	19,49	19,49
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,70	8,66	8,62	8,59	8,58	8,55	8,54	8,53	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,86	5,80	5,75	5,72	5,70	5,66	5,65	5,64	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,62	4,56	4,50	4,46	4,44	4,41	4,39	4,37	4,37
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	3,94	3,87	3,81	3,77	3,75	3,71	3,69	3,68	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,51	3,44	3,38	3,34	3,32	3,27	3,25	3,24	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,22	3,15	3,08	3,04	3,02	2,97	2,95	2,94	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,01	2,94	2,86	2,83	2,80	2,76	2,73	2,72	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,85	2,77	2,70	2,66	2,64	2,59	2,56	2,55	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,72	2,65	2,57	2,53	2,51	2,46	2,43	2,42	2,41
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,62	2,54	2,47	2,43	2,40	2,35	2,32	2,31	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,53	2,46	2,38	2,34	2,31	2,26	2,23	2,22	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,46	2,39	2,31	2,27	2,24	2,19	2,16	2,14	2,14
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,40	2,33	2,25	2,20	2,18	2,12	2,10	2,08	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,35	2,28	2,19	2,15	2,12	2,07	2,04	2,02	2,02
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,31	2,23	2,15	2,10	2,08	2,02	1,99	1,97	1,97
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,27	2,19	2,11	2,06	2,04	1,98	1,95	1,93	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,23	2,16	2,07	2,03	2,00	1,94	1,91	1,89	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,20	2,12	2,04	1,99	1,97	1,91	1,88	1,86	1,85
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,09	2,01	1,92	1,87	1,84	1,78	1,75	1,73	1,72
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,01	1,93	1,84	1,79	1,76	1,70	1,66	1,64	1,63
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	1,92	1,84	1,74	1,69	1,66	1,59	1,55	1,53	1,52
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,03	1,87	1,78	1,69	1,63	1,60	1,52	1,48	1,46	1,45
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,10	2,03	1,97	1,93	1,77	1,68	1,57	1,52	1,48	1,39	1,34	1,31	1,30
200	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	2,06	1,98	1,93	1,88	1,72	1,62	1,52	1,46	1,41	1,32	1,26	1,22	1,21
300	3,87	3,03	2,63	2,40	2,24	2,13	2,04	1,97	1,91	1,86	1,70	1,61	1,50	1,43	1,39	1,30	1,23	1,19	1,17
500	3,86	3,01	2,62	2,39	2,23	2,12	2,03	1,96	1,90	1,85	1,69	1,59	1,48	1,42	1,38	1,28	1,21	1,16	1,14
1 000	3,85	3,00	2,61	2,38	2,22	2,11	2,02	1,95	1,89	1,84	1,68	1,58	1,47	1,41	1,36	1,26	1,19	1,13	1,11

Le tableau ci-dessous donne les valeurs de t en fonction de k_1 et k_2 pour $p = 0{,}975$.

$k_2 \backslash k_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	40	50	100	200	500	1 000
1	648	799	864	900	922	937	948	957	963	969	985	993	1 001	1 006	1 008	1 013	1 016	1 017	1 018
2	38,51	39,00	39,17	39,25	39,30	39,33	39,36	39,37	39,39	39,40	39,43	39,45	39,46	39,47	39,48	39,49	39,49	39,50	39,50
3	17,44	16,04	15,44	15,10	14,88	14,73	14,62	14,54	14,47	14,42	14,25	14,17	14,08	14,04	14,01	13,96	13,93	13,91	13,91
4	12,22	10,65	9,98	9,60	9,36	9,20	9,07	8,98	8,90	8,84	8,66	8,56	8,46	8,41	8,38	8,32	8,29	8,27	8,26
5	10,01	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,85	6,76	6,68	6,62	6,43	6,33	6,23	6,18	6,14	6,08	6,05	6,03	6,02
6	8,81	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,70	5,60	5,52	5,46	5,27	5,17	5,07	5,01	4,98	4,92	4,88	4,86	4,86
7	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,99	4,90	4,82	4,76	4,57	4,47	4,36	4,31	4,28	4,21	4,18	4,16	4,15
8	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,53	4,43	4,36	4,30	4,10	4,00	3,89	3,84	3,81	3,74	3,70	3,68	3,68
9	7,21	5,71	5,08	4,72	4,48	4,32	4,20	4,10	4,03	3,96	3,77	3,67	3,56	3,51	3,47	3,40	3,37	3,35	3,34
10	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,95	3,85	3,78	3,72	3,52	3,42	3,31	3,26	3,22	3,15	3,12	3,09	3,09
11	6,72	5,26	4,63	4,28	4,04	3,88	3,76	3,66	3,59	3,53	3,33	3,23	3,12	3,06	3,03	2,96	2,92	2,90	2,89
12	6,55	5,10	4,47	4,12	3,89	3,73	3,61	3,51	3,44	3,37	3,18	3,07	2,96	2,91	2,87	2,80	2,76	2,74	2,73
13	6,41	4,97	4,35	4,00	3,77	3,60	3,48	3,39	3,31	3,25	3,05	2,95	2,84	2,78	2,74	2,67	2,63	2,61	2,60
14	6,30	4,86	4,24	3,89	3,66	3,50	3,38	3,29	3,21	3,15	2,95	2,84	2,73	2,67	2,64	2,56	2,53	2,50	2,50
15	6,20	4,77	4,15	3,80	3,58	3,41	3,29	3,20	3,12	3,06	2,86	2,76	2,64	2,59	2,55	2,47	2,44	2,41	2,40
16	6,12	4,69	4,08	3,73	3,50	3,34	3,22	3,12	3,05	2,99	2,79	2,68	2,57	2,51	2,47	2,40	2,36	2,33	2,32
17	6,04	4,62	4,01	3,66	3,44	3,28	3,16	3,06	2,98	2,92	2,72	2,62	2,50	2,44	2,41	2,33	2,29	2,26	2,26
18	5,98	4,56	3,95	3,61	3,38	3,22	3,10	3,01	2,93	2,87	2,67	2,56	2,44	2,38	2,35	2,27	2,23	2,20	2,20
19	5,92	4,51	3,90	3,56	3,33	3,17	3,05	2,96	2,88	2,82	2,62	2,51	2,39	2,33	2,30	2,22	2,18	2,15	2,14
20	5,87	4,46	3,86	3,51	3,29	3,13	3,01	2,91	2,84	2,77	2,57	2,46	2,35	2,29	2,25	2,17	2,13	2,10	2,09
25	5,69	4,29	3,69	3,35	3,13	2,97	2,85	2,75	2,68	2,61	2,41	2,30	2,18	2,12	2,08	2,00	1,95	1,92	1,91
30	5,57	4,18	3,59	3,25	3,03	2,87	2,75	2,65	2,57	2,51	2,31	2,20	2,07	2,01	1,97	1,88	1,84	1,81	1,80
40	5,42	4,05	3,46	3,13	2,90	2,74	2,62	2,53	2,45	2,39	2,18	2,07	1,94	1,88	1,83	1,74	1,69	1,66	1,65
50	5,34	3,97	3,39	3,05	2,83	2,67	2,55	2,46	2,38	2,32	2,11	1,99	1,87	1,80	1,75	1,66	1,60	1,57	1,56
100	5,18	3,83	3,25	2,92	2,70	2,54	2,42	2,32	2,24	2,18	1,97	1,85	1,71	1,64	1,59	1,48	1,42	1,38	1,36
200	5,10	3,76	3,18	2,85	2,63	2,47	2,35	2,26	2,18	2,11	1,90	1,78	1,64	1,56	1,51	1,39	1,32	1,27	1,25
300	5,07	3,73	3,16	2,83	2,61	2,45	2,33	2,23	2,16	2,09	1,88	1,75	1,62	1,54	1,48	1,36	1,28	1,23	1,21
500	5,05	3,72	3,14	2,81	2,59	2,43	2,31	2,22	2,14	2,07	1,86	1,74	1,60	1,52	1,46	1,34	1,25	1,19	1,17
1 000	5,04	3,70	3,13	2,80	2,58	2,42	2,30	2,20	2,13	2,06	1,85	1,72	1,58	1,50	1,45	1,32	1,23	1,16	1,13

Le tableau ci-dessous donne les valeurs de t en fonction de k_1 et k_2 pour p = 0,99.

$k_2 \backslash k_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	40	50	100	200	500	1 000
1	4 052	4 999	5 404	5 624	5 764	5 859	5 928	5 981	6 022	6 056	6 157	6 209	6 260	6 286	6 302	6 334	6 350	6 360	6 363
2	98,5	99,0	99,2	99,3	99,3	99,3	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5
3	34,1	30,8	29,5	28,7	28,2	27,9	27,7	27,5	27,3	27,2	26,9	26,7	26,5	26,4	26,4	26,2	26,2	26,1	26,1
4	21,2	18,0	16,7	16,0	15,5	15,2	15,0	14,8	14,7	14,5	14,2	14,0	13,8	13,7	13,7	13,6	13,5	13,5	13,5
5	16,3	13,3	12,1	11,4	11,0	10,7	10,5	10,3	10,2	10,1	9,7	9,6	9,4	9,3	9,2	9,1	9,1	9,0	9,0
6	13,7	10,9	9,8	9,1	8,7	8,5	8,3	8,1	8,0	7,9	7,6	7,4	7,2	7,1	7,1	7,0	6,9	6,9	6,9
7	12,2	9,5	8,5	7,8	7,5	7,2	7,0	6,8	6,7	6,6	6,3	6,2	6,0	5,9	5,9	5,8	5,7	5,7	5,7
8	11,3	8,6	7,6	7,0	6,6	6,4	6,2	6,0	5,9	5,8	5,5	5,4	5,2	5,1	5,1	5,0	4,9	4,9	4,9
9	10,6	8,0	7,0	6,4	6,1	5,8	5,6	5,5	5,4	5,3	5,0	4,8	4,6	4,6	4,5	4,4	4,4	4,3	4,3
10	10,0	7,6	6,6	6,0	5,6	5,4	5,2	5,1	4,9	4,8	4,6	4,4	4,2	4,2	4,1	4,0	4,0	3,9	3,9
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	4,25	4,10	3,94	3,86	3,81	3,71	3,66	3,62	3,61
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,01	3,86	3,70	3,62	3,57	3,47	3,41	3,38	3,37
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	3,82	3,66	3,51	3,43	3,38	3,27	3,22	3,19	3,18
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,66	3,51	3,35	3,27	3,22	3,11	3,06	3,03	3,02
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,52	3,37	3,21	3,13	3,08	2,98	2,92	2,89	2,88
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,41	3,26	3,10	3,02	2,97	2,86	2,81	2,78	2,76
17	8,40	6,11	5,19	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,31	3,16	3,00	2,92	2,87	2,76	2,71	2,68	2,66
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51	3,23	3,08	2,92	2,84	2,78	2,68	2,62	2,59	2,58
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43	3,15	3,00	2,84	2,76	2,71	2,60	2,55	2,51	2,50
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37	3,09	2,94	2,78	2,69	2,64	2,54	2,48	2,44	2,43
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32	3,22	3,13	2,85	2,70	2,54	2,45	2,40	2,29	2,23	2,19	2,18
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98	2,70	2,55	2,39	2,30	2,25	2,13	2,07	2,03	2,02
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80	2,52	2,37	2,20	2,11	2,06	1,94	1,87	1,83	1,82
50	7,17	5,06	4,20	3,72	3,41	3,19	3,02	2,89	2,78	2,70	2,42	2,27	2,10	2,01	1,95	1,82	1,76	1,71	1,70
100	6,90	4,82	3,98	3,51	3,21	2,99	2,82	2,69	2,59	2,50	2,22	2,07	1,89	1,80	1,74	1,60	1,52	1,47	1,45
200	6,76	4,71	3,88	3,41	3,11	2,89	2,73	2,60	2,50	2,41	2,13	1,97	1,79	1,69	1,63	1,48	1,39	1,33	1,30
300	6,72	4,68	3,85	3,38	3,08	2,86	2,70	2,57	2,47	2,38	2,10	1,94	1,76	1,66	1,59	1,44	1,35	1,28	1,25
500	6,69	4,65	3,82	3,36	3,05	2,84	2,68	2,55	2,44	2,36	2,07	1,92	1,74	1,63	1,57	1,41	1,31	1,23	1,20
1 000	6,66	4,63	3,80	3,34	3,04	2,82	2,66	2,53	2,43	2,34	2,06	1,90	1,72	1,61	1,54	1,38	1,28	1,19	1,16

Le tableau ci-dessous donne les valeurs de t en fonction de k_1 et k_2 pour p = 0,995.

$k_2 \backslash k_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	40	50	100	200	500	1 000
1	16 212	19 997	21 614	22 501	23 056	23 440	23 715	23 924	24 091	24 222	24 632	24 837	25 041	25 146	25 213	25 339	25 399	25 436	25 451
2	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	200	200
3	55,6	49,8	47,5	46,2	45,4	44,8	44,4	44,1	43,9	43,7	43,1	42,8	42,5	42,3	42,2	42,0	41,9	41,9	41,8
4	31,3	26,3	24,3	23,2	22,5	22,0	21,6	21,4	21,1	21,0	20,4	20,2	19,9	19,8	19,7	19,5	19,4	19,4	19,3
5	22,8	18,3	16,5	15,6	14,9	14,5	14,2	14,0	13,8	13,6	13,1	12,9	12,7	12,5	12,5	12,3	12,2	12,2	12,2
6	18,6	14,5	12,9	12,0	11,5	11,1	10,8	10,6	10,4	10,3	9,8	9,6	9,4	9,2	9,2	9,0	9,0	8,9	8,9
7	16,2	12,4	10,9	10,1	9,5	9,2	8,9	8,7	8,5	8,4	8,0	7,8	7,5	7,4	7,4	7,2	7,1	7,1	7,1
8	14,7	11,0	9,6	8,8	8,3	8,0	7,7	7,5	7,3	7,2	6,8	6,6	6,4	6,3	6,2	6,1	6,0	6,0	6,0
9	13,6	10,1	8,7	8,0	7,5	7,1	6,9	6,7	6,5	6,4	6,0	5,8	5,6	5,5	5,5	5,3	5,3	5,2	5,2
10	12,8	9,4	8,1	7,3	6,9	6,5	6,3	6,1	6,0	5,8	5,5	5,3	5,1	5,0	4,9	4,8	4,7	4,7	4,7
11	12,23	8,91	7,60	6,88	6,42	6,10	5,86	5,68	5,54	5,42	5,05	4,86	4,65	4,55	4,49	4,36	4,29	4,25	4,24
12	11,75	8,51	7,23	6,52	6,07	5,76	5,52	5,35	5,20	5,09	4,72	4,53	4,33	4,23	4,17	4,04	3,97	3,93	3,92
13	11,37	8,19	6,93	6,23	5,79	5,48	5,25	5,08	4,94	4,82	4,46	4,27	4,07	3,97	3,91	3,78	3,71	3,67	3,66
14	11,06	7,92	6,68	6,00	5,56	5,26	5,03	4,86	4,72	4,60	4,25	4,06	3,86	3,76	3,70	3,57	3,50	3,46	3,45
15	10,80	7,70	6,48	5,80	5,37	5,07	4,85	4,67	4,54	4,42	4,07	3,88	3,69	3,59	3,52	3,39	3,33	3,29	3,27
16	10,58	7,51	6,30	5,64	5,21	4,91	4,69	4,52	4,38	4,27	3,92	3,73	3,54	3,44	3,37	3,25	3,18	3,14	3,13
17	10,38	7,35	6,16	5,50	5,07	4,78	4,56	4,39	4,25	4,14	3,79	3,61	3,41	3,31	3,25	3,12	3,05	3,01	3,00
18	10,22	7,21	6,03	5,37	4,96	4,66	4,44	4,28	4,14	4,03	3,68	3,50	3,30	3,20	3,14	3,01	2,94	2,90	2,89
19	10,07	7,09	5,92	5,27	4,85	4,56	4,34	4,18	4,04	3,93	3,59	3,40	3,21	3,11	3,04	2,91	2,85	2,80	2,79
20	9,94	6,99	5,82	5,17	4,76	4,47	4,26	4,09	3,96	3,85	3,50	3,32	3,12	3,02	2,96	2,83	2,76	2,72	2,70
25	9,48	6,60	5,46	4,84	4,43	4,15	3,94	3,78	3,64	3,54	3,20	3,01	2,82	2,72	2,65	2,52	2,45	2,41	2,39
30	9,18	6,35	5,24	4,62	4,23	3,95	3,74	3,58	3,45	3,34	3,01	2,82	2,63	2,52	2,46	2,32	2,25	2,21	2,19
40	8,83	6,07	4,98	4,37	3,99	3,71	3,51	3,35	3,22	3,12	2,78	2,60	2,40	2,30	2,23	2,09	2,01	1,96	1,95
50	8,63	5,90	4,83	4,23	3,85	3,58	3,38	3,22	3,09	2,99	2,65	2,47	2,27	2,16	2,10	1,95	1,87	1,82	1,80
100	8,24	5,59	4,54	3,96	3,59	3,33	3,13	2,97	2,85	2,74	2,41	2,23	2,02	1,91	1,84	1,68	1,59	1,53	1,51
200	8,06	5,44	4,41	3,84	3,47	3,21	3,01	2,86	2,73	2,63	2,30	2,11	1,91	1,79	1,71	1,54	1,44	1,37	1,34
300	8,00	5,39	4,36	3,80	3,43	3,17	2,97	2,82	2,69	2,59	2,26	2,07	1,87	1,75	1,67	1,50	1,39	1,31	1,28
500	7,95	5,35	4,33	3,76	3,40	3,14	2,94	2,79	2,66	2,56	2,23	2,04	1,84	1,72	1,64	1,46	1,35	1,26	1,22
1 000	7,91	5,33	4,30	3,74	3,37	3,11	2,92	2,77	2,64	2,54	2,21	2,02	1,81	1,69	1,61	1,43	1,31	1,22	1,18