Incertitudes

I - Vocabulaire

Mesurande : grandeur particulière à mesurer, on note X le mesurande et x une mesure de la grandeur.

Le terme grandeur peut se rapporter à une longueur d'un objet, temps, masse, température, concentration molaire d'un produit chimique dans telle solution...

Incertitude de mesure : paramètre, associé au résultat d'un mesurage, qui caractérise la dispersion des valeurs qui pourraient raisonnablement être attribuées au mesurande. Elle ne peut pas être utilisée pour corriger le résultat d'une mesure.

Incertitude-type : incertitude d'une composante de l'incertitude exprimée sous forme d'un écart-type.

Incertitude-type composée : incertitude du résultat d'un mesurage obtenu à partir des valeurs d'autres grandeurs, exprimée sous forme d'un écart-type, elle est notée $u(X)$.

Incertitude élargie : grandeur définissant un intervalle, autour d'un résultat d'un mesurage, dont on puisse s'attendre à ce qu'il contienne une fraction élevée (probabilité, niveau de confiance) de la distribution des valeurs qui pourraient être attribuées raisonnablement au mesurande, elle est notée $U(X)$.

Incertitude relative : $\frac{U(X)}{x}$

Facteur d'élargissement : facteur numérique utilisé comme multiplicateur de l'incertitude type composée pour obtenir l'incertitude élargie, il est noté k.

Erreur : différence entre le résultat et la valeur du mesurande : en tant que telle l'erreur est une valeur souvent inconnue. La valeur d'une erreur connue peut être utilisée pour corriger un résultat.

Le résultat d'un mesure comporte 4 éléments :

$$\boxed{X = (\underbrace{x}_{❶} \pm \underbrace{U(X)}_{❷})\ \underbrace{\text{unités}}_{❸}\ \underbrace{(k = ...)}_{❹}}$$

II - Types de mesures

La mesure x d'une grandeur X peut être :

- directe comme la pesée, la distance.
- indirecte comme la concentration, la vitesse.

III - Évaluations des incertitudes-types

L'incertitude d'un résultat de mesure comprend généralement plusieurs composantes qui peuvent être groupées en deux catégories selon la méthode utilisée pour évaluer leur valeur numérique :

- **Évaluations de type A :** pour les méthodes statistiques ;

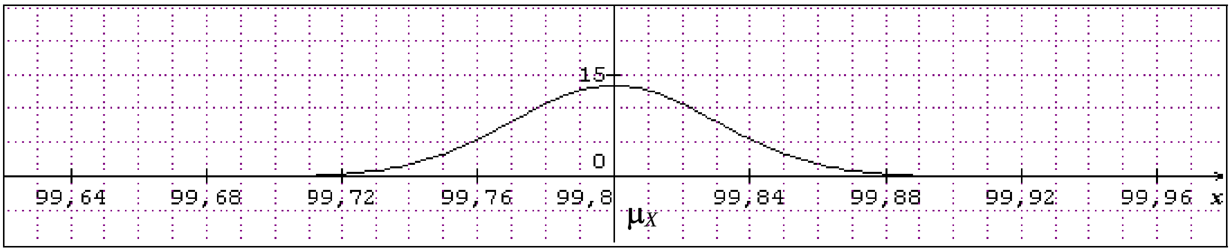
  C'est le cas où l'opérateur fait toute une série de mesures. Le traitement de l'incertitude est statistique (moyenne, écart-type…). Cette analyse statistique se fait lorsqu'on a peu d'indications sur les sources d'erreurs.

- **Évaluations de type B :** pour les autres méthodes (autres que statistiques).

1. Méthode d'évaluation d'incertitude-type de type A

Différentes mesures de X diffèrent en raison des variations aléatoires des grandeurs d'influence ou des effets aléatoires. Les mesures de X sont distribuées avec une espérance μ_X et un écart-type σ_X. L'espérance mathématique est une caractéristique de position ou de tendance centrale, l'écart-type est une caractéristique de dispersion. σ_X s'interprète comme l'incertitude-type de X.

Exemple 1 :



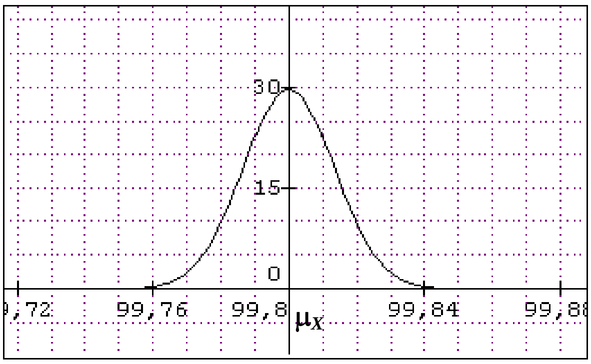
Distribution normale de paramètres $\mu_X = 99{,}8$ et $\sigma_X = 0{,}03$

a. Estimation de l'espérance mathématique μ_X

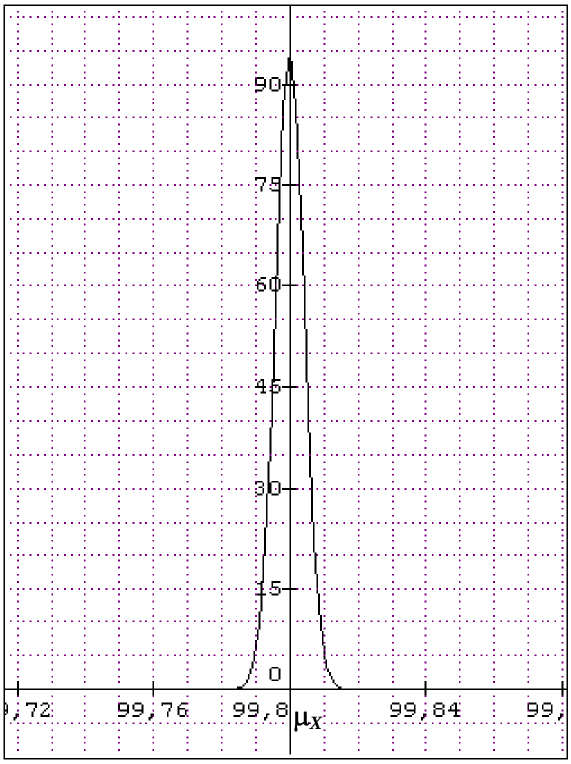
La valeur d'une grandeur X est l'espérance mathématique μ_X de la distribution des mesures. Si on dispose de n mesures indépendantes x_k (pour $1 \leq k \leq n$) obtenues dans les mêmes conditions de mesure, dans la plupart des cas, la meilleur estimation disponible de μ_X est la moyenne arithmétique des n observations x_k.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \text{ : moyenne d'échantillonnage}$$

La moyenne d'échantillonnage est distribuée selon une loi d'espérance μ_X et d'écart-type $\frac{s_X}{\sqrt{n}}$.



Distribution de la moyenne d'échantillonnage (taille 5)



Distribution de la moyenne d'échantillonnage (taille 50)

b. Estimation de l'écart-type σ_X

La variance expérimentale (ou corrigée) s^2 des n observations estime la variance $\sigma_X{}^2$ de la distribution des mesures de X.

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k - \bar{x}\right)^2$$

L'écart-type expérimental (ou corrigé) s des observations estime l'écart-type σ_X de la distribution des mesures de X.

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k - \bar{x}\right)^2}$$

La variance de la moyenne d'échantillonnage est $\sigma_X{}^2(\bar{x}) = \frac{\sigma_X{}^2}{n}$, on l'estime par $s^2(\bar{x}) = \frac{s^2}{n}$.

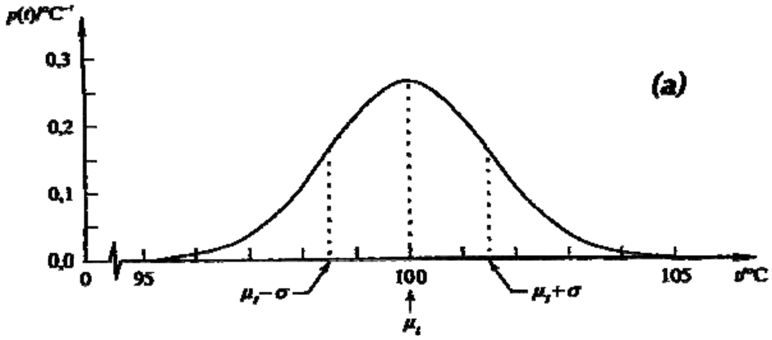
L'écart-type de la moyenne d'échantillonnage est $\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$, on l'estime par $s(\bar{x}) = \frac{s}{\sqrt{n}}$. Il quantifie la manière dont $\bar{x}$ estime l'espérance mathématique μ_x de X. Il peut être utilisé pour mesurer l'incertitude de $\bar{X}$.

Remarque :

Le nombre d'observations n doit être suffisamment grand pour garantir que $\bar{x}$ fournit une estimation fiable de l'espérance mathématique σ_X de X et que $s^2(\bar{x})$ fournit une estimation fiable de la variance de la moyenne d'échantillonnage $\frac{\sigma_X{}^2}{n}$.

Exemple 2 :

La grandeur est une température t distribuée selon la loi normale d'espérance mathématique $\mu_t = 100$ °C et d'écart-type $\sigma = 1{,}5$ °C.



On dispose de 20 observations répétées t_k de t.

96,90 ; 98,18 ; 98,25 ; 98,61 ; 99,03 ; 99,49 ; 99,56 ; 99,74 ; 99,89 ; 100,07 ; 100,33 ; 100,42 ; 100,68 ; 100,95 ; 101,11 ; 101,20 ; 101,57 ; 101,84 ; 102,36 ; 102,72.

La moyenne arithmétique est $\bar{t} = 100{,}14$ °C et elle est supposée être la meilleure estimation de l'espérance mathématique μ_t de t sur la base des données disponibles.

L'écart-type expérimental $s(t_k) = 1{,}49$ °C.

L'écart-type de la moyenne estimé est $s(\bar{t}) = \frac{s(t_k)}{\sqrt{20}} = 0{,}33$ °C

Exemple 3 : Étalonnage de la verrerie, pipette 5ml

Une pipette a été étalonnée en faisant 5 mesures.
Masse volumique de l'eau : 0,995310 g/mL à 20,5 °C.

masse de la verrerie + eau (g)	température (°C)	Volume verrerie (mL)
4,980	20,5	
4,980	20,5	
5,000	20,5	
4,990	20,5	
5,100	20,5	

Déterminer le volume et l'écart-type corrigé du volume dans le cas de l'étalonnage de la pipette.

2. Méthode d'évaluation d'incertitude de type B

a. Généralités

Pour une estimation x d'une grandeur X qui n'a pas été obtenue à partir d'observations répétées, la variance estimée de la distribution de X est évaluée par un jugement scientifique fondé sur toutes les informations disponibles au sujet de la variabilité possible de X. L'ensemble des informations accumulées peut comprendre :

- des résultats de mesures antérieures ;
- l'expérience, la connaissance du comportement et des propriétés des matériaux et instruments utilisées ;
- les spécifications du fabricant ;
- les données fournies par des certificats d'étalonnage ou autres certificats ;
- l'incertitude assignée à des valeurs de référence provenant d'ouvrages ou manuels.

b. Incertitude "simple"

Quand l'incertitude est multiple d'un écart-type

Si on obtient l'estimation x à partir d'une spécification du fabricant, d'un certificat d'étalonnage, d'une publication ou d'une autre source et que son incertitude indiquée soit donnée comme étant un multiple déterminé d'un écart-type, l'incertitude-type $u(x)$ est égale au quotient de la valeur indiquée par le facteur multiplicatif et la variance estimée est égale au carré de ce quotient.

Exemple 4 :

Un certificat d'étalonnage indique que la masse m_S d'un étalon de masse en acier inoxydable de valeur nominale égale à 1 kilogramme est de 1 000,000 325 g et que "l'incertitude sur cette valeur est égale à 240 µg au niveau de 3 écarts-types".

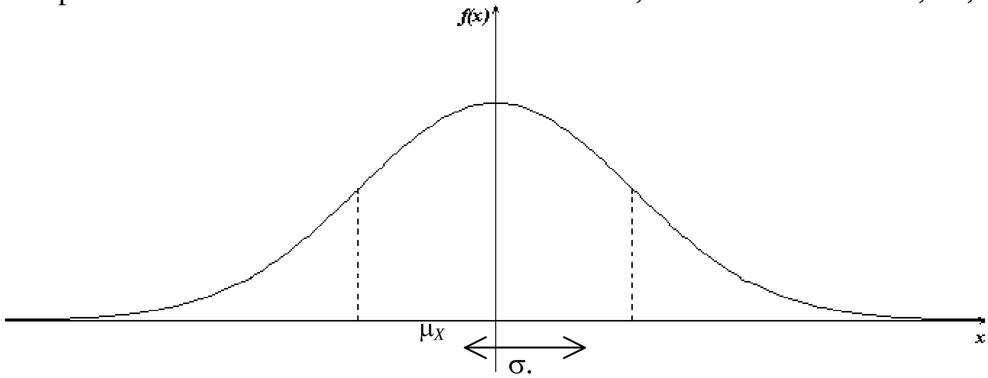
L'incertitude-type de l'étalon de masse est alors : $u(m_S) = \frac{(240 \text{ mg})}{3} = 80$ µg.

Cela correspond à une incertitude-type relative $\frac{u(m_S)}{m_S}$ égale à 80×10^{-9}.

La variance estimée est $u^2(m_S) = (80 \text{ µg})^2 = 6{,}4 \times 10^{-9}$ g^2.

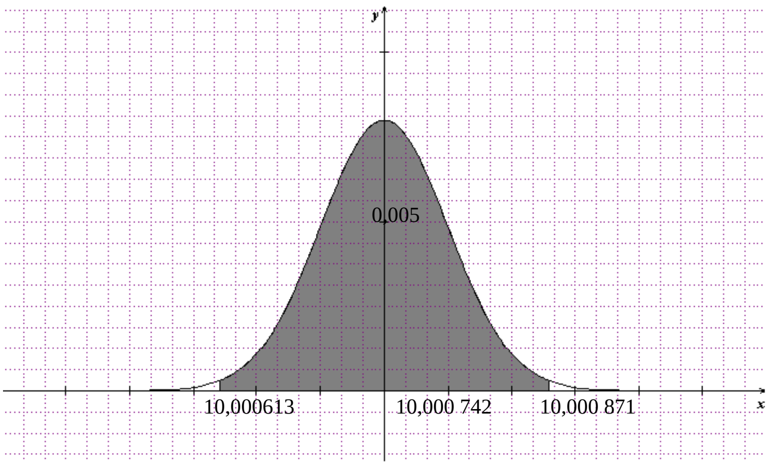
Quand la distribution des mesures est normale

L'incertitude fournie pour *x* n'est pas nécessairement donnée comme un multiple d'un écart-type, elle peut définir un intervalle correspondant à un niveau de confiance de. Sauf indication contraire, on peut supposer qu'une loi normale a été utilisée pour calculer l'incertitude fournie. On peut alors retrouver l'incertitude-type de *x* en divisant la valeur de l'incertitude par le facteur approprié pour les lois normales. Les facteurs correspondant aux trois niveaux de confiance 90 %, 95 % ou 99 % sont 1,64 ; 1,96 et 2,58.



Exemple 5 :

Un certificat d'étalonnage indique que la valeur R_5 d'une résistance étalon de valeur nominale égale à dix ohms est $10{,}000\,742\ \Omega \pm 129\ \mu\Omega$ à 23 °C et que "l'incertitude indiquée de 129 μΩ définit un intervalle au niveau de confiance de 99 %".



L'incertitude-type sur la valeur de la résistance peut être prise égale à

$$u(R_5) = \frac{129}{2{,}58} = 50\ \mu\Omega$$

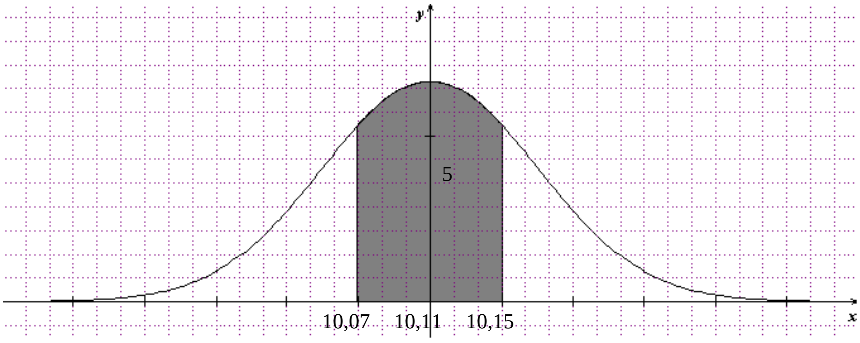
Cela correspond à une incertitude-type relative $\frac{u(R_5)}{R_5}$ de $5{,}0 \times 10^{-6}$.

La variance estimée est $u^2(R_5) = (50\ \mu\Omega)^2 = 2{,}5 \times 10^{-9}\ \Omega^2$.

Considérons que, sur la base des informations disponibles, on énonce qu'"il y a un chance sur deux d'obtenir un intervalle de bornes a_- et a_+ contenant la valeur de *X*" (en d'autres termes, la probabilité que *X* soit située dans cet intervalle est égale à 0,5 ou 50 %). Si on peut supposer que les valeurs possibles de *X* sont distribuées approximativement selon une loi normale, alors la meilleure estimation *x* de *X* peut être prise au milieu de l'intervalle. De plus, si la demi-largeur de l'intervalle est notée $a = \frac{a_+ - a_-}{2}$, on peut estimer $u(x)$ par $1{,}48\,a$, car, pour une loi normale d'espérance mathématique μ et d'écart-type σ, l'intervalle $\left[\mu - \frac{\sigma}{1{,}48} ; \mu + \frac{\sigma}{1{,}48}\right]$ recouvre approximativement 50 % de la distribution.

Exemple 6 :

Un mécanicien qui détermine les dimensions d'une pièce estime que sa longueur se situe dans l'intervalle [10,07 mm ; 10,15 mm] avec un niveau de confiance de 0,5 et donne $l = (10{,}11 \pm 0{,}04)$ mm ; cela signifie que $\pm$ 0,04 mm définit un intervalle ayant un niveau de confiance de 50 %; a est alors égale à 0,04 mm.



En supposant une loi normale pour la distributions des mesures de la pièce, l'incertitude-type sur la longueur est :

$$u(L) = 1{,}48 \times 0{,}04 \text{ mm} = 0{,}06 \text{ mm}$$

et sa variance estimée est :

$$u^2(L) = (1{,}48 \times 0{,}04 \text{ mm})^2 = 3{,}5 \times 10^{-3} \text{ mm}^2.$$

Considérons que, sur la base des informations disponibles, on énonce qu'"il y a un chance sur trois d'obtenir un intervalle de bornes a_- et a_+ contenant la valeur de X" (en d'autres termes, la probabilité que X soit située dans cet intervalle est égale à 0,67). On peut alors raisonnablement estimer $u(x)$ par a, car, pour une loi normale d'espérance mathématique μ et d'écart-type σ, l'intervalle [μ - σ ; μ + σ] recouvre approximativement 68,3 % de la distribution.

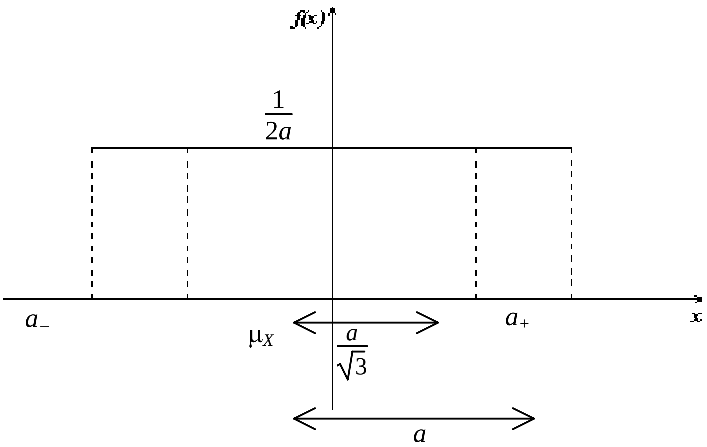
(La valeur "exacte" est $u(x) = 1{,}033\, a$.)

Distribution rectangulaire

Si les limites inférieure et supérieure pour X sont données sans niveau de confiance et s'il existe des raisons de penser que des valeurs extrêmes sont probables, il convient de supposer que la distribution est rectangulaire. On suppose que X se situe d'une manière également probable en tout point de l'intervalle (distribution uniforme ou rectangulaire des valeurs possibles).

Alors x, l'espérance mathématique μ_X de X, est le milieu de l'intervalle $[a_-; a_+]$ soit $\dfrac{a_+ + a_-}{2}$ avec la variance associée $u^2(X) = \dfrac{(a_+ - a_-)^2}{12}$.

Si la demi-largeur de l'intervalle est $a = \dfrac{a_+ - a_-}{2}$ alors $u^2(X) = \dfrac{a^2}{3}$ et $u(X) = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$. (Voir démonstration en annexe en fin d'article.)



Exemple 7 :

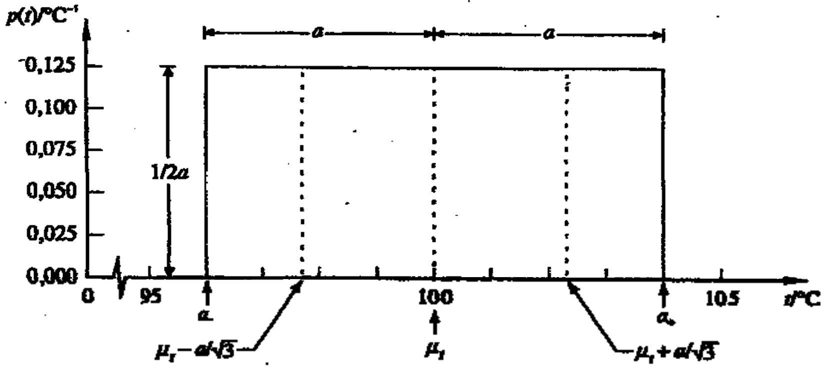
Un manuel donne la valeur du coefficient de dilatation linéique du cuivre pour 20 °C, $a_{20}(C_u)$ comme étant égal à $16{,}52 \times 10^{-6}\,°C^{-1}$ et énonce simplement que l'erreur sur cette valeur ne devrait pas dépasser $0{,}40 \times 10^{-6}\,°C^{-1}$". Sur la base de cette information limitée, il n'est pas déraisonnable de supposer que la valeur de $a_{20}(C_u)$ est située avec une probabilité uniforme dans l'intervalle $[16{,}12 \times 10^{-6}\,°C^{-1} ; 16{,}92 \times 10^{-6}\,°C^{-1}]$ et qu'il est très peu vraisemblable que $a_{20}(C_u)$ soit situé en dehors de cet intervalle.

La variance de cette loi rectangulaire symétrique des mesures de $a_{20}(C_u)$ de demi-largeur $a = 0{,}40 \times 10^{-6}\,°C^{-1}$ est alors $u^2(a_{20}) = \dfrac{(0{,}40 \times 10^{-6}\,°C^{-1})^2}{3} = 53{,}3 \times 10^{-15}\,°C^{-2}$ et l'incertitude-type est alors $u(a_{20}) = \dfrac{0{,}40 \times 10^{-6}\,°C^{-1}}{\sqrt{3}} = 0{,}23 \times 10^{-6}\,°C^{-1}$.

Exemple 8 :

On suppose que l'on possède peu d'information sur la grandeur t et que tout ce que l'on peut faire est de supposer que t est distribuée selon une loi de probabilité *a priori* rectangulaire symétrique de limite inférieure $a_- = 96$ °C et de limite supérieure $a_+ = 104$ °C avec une demi largeur égale alors à $a = \dfrac{a_+ + a_-}{2}$ soit $a = 4$ °C.

La meilleure estimation de t est son espérance mathématique $\mu_t = \dfrac{a_+ + a_-}{2} = 100$ °C . L'incertitude-type de cette estimation est $u(\mu_t) = \dfrac{a}{\sqrt{3}} = 2{,}3$ °C.

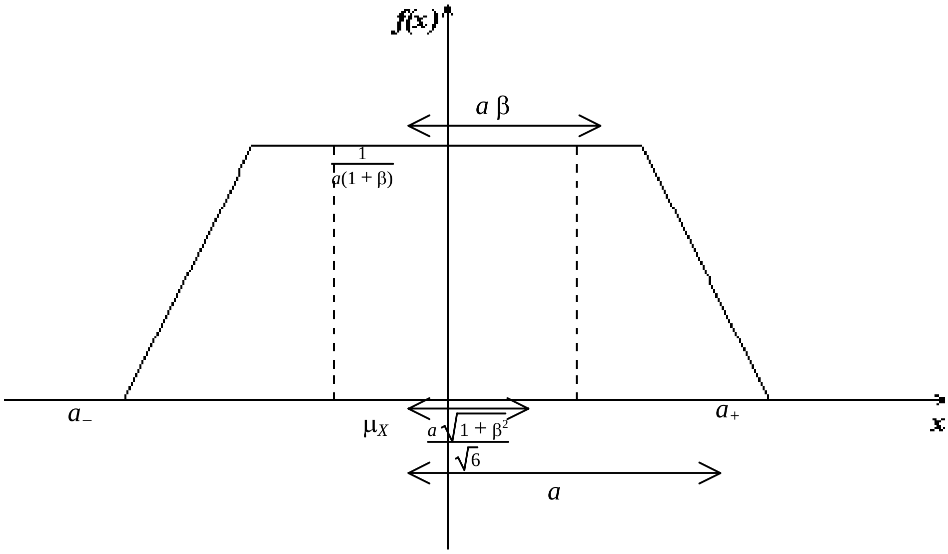


Distributions trapézoïdale et triangulaire

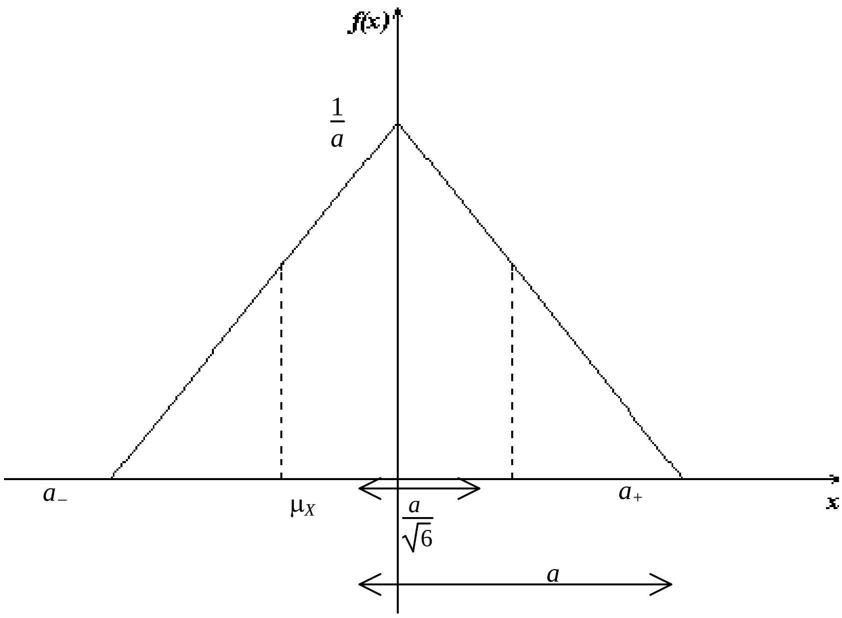
Les discontinuités des lois précédentes se rencontrent rarement en physique.
Dans de nombreux cas, si les limites inférieure et supérieure pour X sont données sans niveau de confiance et s'il existe des raisons de penser que des valeurs extrêmes sont improbables, il est raisonnable de supposer que X est distribuée selon une loi trapézoïdale symétrique de pentes opposées, de grande base $2a$ avec $a = \dfrac{a_+ - a_-}{2}$ et de petite base $2a\beta$ avec $0 \le \beta \le 1$.

Lorsque β tend vers 1, cette distribution trapézoïdale tend vers une loi rectangulaire.

Alors x, l'espérance mathématique de X, est $\dfrac{a_+ + a_-}{2}$ avec la variance associée $u^2(X) = \dfrac{a^2(1+b^2)}{6}$.



Lorsque $\beta = 0$, on obtient une loi triangulaire.



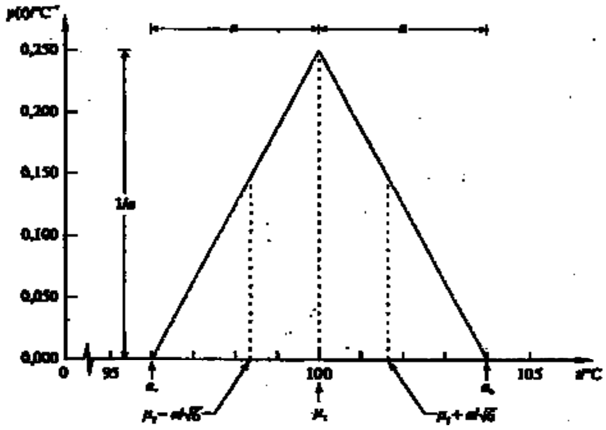
Pour la loi triangulaire, la variance associée est $u^2(X) = \dfrac{a^2}{6}$. (Voir démonstration en annexe en fin d'article.)

Exemple 9 :

On veut déterminer l'incertitude du fabricant sur une pipette 20,00 mL de classe A.

On sait que EMT = 0,2% volume total. On suppose que le volume prélevé d'après le fabricant est distribuée selon une loi de probabilité *a priori* triangulaire symétrique de limite inférieure $a_{-} = 19{,}96$mL et de limite supérieure $a_{+} = 20{,}04$ mL avec une demi largeur égale alors à $a = 0{,}0\ 4$ mL (= EMT)

L'incertitude-type du fabricant est $u(\text{fabricant}) = \dfrac{a}{\sqrt{6}} = 0{,}016$ mL



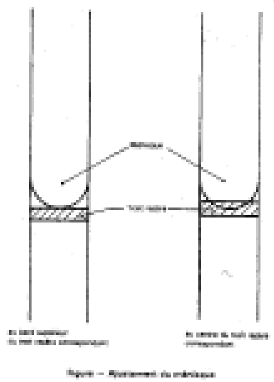
Exemple 10 :

Une des composantes de l'incertitude sur un volume, est celle sur l'ajustage (c'est-à-dire l'incertitude de l'opérateur).

On applique une distribution triangulaire.

On considère qu'on est capable d'ajuster le ménisque du liquide au trait de jauge à +/- 1mm. Le diamètre intérieur de la fiole est de $r = 1$ cm.

On a donc $a = \pi \times 0{,}5^2 \times 0{,}1$ cm^3 ($\pi \times r^2 \times h$).



L'incertitude-type de cette estimation est $u(V) = \dfrac{a}{\sqrt{6}} = 0{,}03$ cm^3 (soit 0,03 mL).

c. Incertitude composée

On s'intéresse à l'incertitude sur $Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_N)$ où $X_1, x_2, \ldots, x_N$ sont des grandeurs d'entrée pour lesquelles on connaît l'incertitude-type $u(X_k)$ obtenue par une évaluation de type A ou B..

Grandeurs non corrélées

On se limite ici au cas où les grandeurs d'entrée sont indépendantes.

L'incertitude-type de Y est obtenue par une composition appropriée des incertitudes-types des estimations d'entrées $x_1, x_2, \ldots, x_N$. Cette incertitude-type composée de l'estimation y est notée $u_c(Y)$. C'est la racine carrée de la variance composée $u_c^2(y)$.

$$u_c^2(Y) = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^2 u^2(X_k)$$

Remarque :

Les $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ sont souvent appelés coefficients de sensibilité et décrivent comment varie l'estimation de y en fonction des estimations $x_1, x_2, \ldots, x_N$.

En particulier, une petite variation Δx_k sur l'estimation x_k induit une variation $\Delta y = \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)(\Delta x_k)$ sur y.

Si cette variation est l'incertitude-type de X_k, la variation correspondante de y est $\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) u(X_k)$.

La variance composée $u_c^2(Y)$ est alors la somme de ces variations.

L'incertitude-type composée $u_c(Y)$ est un écart-type estimé et caractérise la dispersion des valeurs qui pourraient raisonnablement attribuées au mesurande Y.

Grandeurs corrélées

Si certains des X_k sont corrélés significativement, il faut prendre en compte les corrélations pour le calcul de l'incertitude composée.

Lorsque les grandeurs d'entrée sont corrélées, l'expression de la variance composées est la suivante :

$$u_c^2(Y) = \sum_{\substack{1 \le i \le N \\ 1 \le j \le N}} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_k) + 2 \sum_{\substack{1 \le i \le N-1 \\ i+1 \le j \le N}} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j)$$

où $u(x_i, x_j)$ est la covariance estimée de X_i et X_j.

On a aussi : $$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_k) + 2 \sum_{\substack{1 \le i \le N-1 \\ i+1 \le j \le N}} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i)\, u(x_j)\, r(x_i, x_j)$$

où $r(x_i, x_j)$ est le coefficient de corrélation estimé entre X_i et X_j.

d. Incertitude élargie

Bien que l'incertitude-type composée $u_c(Y)$ soit utilisée pour exprimer l'incertitude d'un résultat de mesure, il est souvent nécessaires pour certaines applications commerciales, industrielles ou réglementaires, ou lorsque cela concerne la santé ou la sécurité de donner une mesure de l'incertitude qui définisse, autour du résultat de mesure, un intervalle à l'intérieur duquel on puisse espérer voir se situer une large fraction élevée p de la distribution des valeurs qui pourraient être raisonnablement attribuées au mesurande. Cette incertitude est appelée incertitude élargie et se note $U(Y)$. L'incertitude élargie $U(Y)$ s'obtient en multipliant l'incertitude-type composée $u_c(Y)$ par un facteur d'élargissement k, ainsi $U(Y) = k\, u_c(Y)$.

Il est alors recommandé d'exprimer le résultat d'un mesurage sous la forme $Y = y \pm U(Y)$.

p est la probabilité ou le niveau de confiance associé à l'intervalle $[y - U(Y)\,;\, y + U(Y)]$.

Chaque fois que cela est possible, le niveau de confiance p associé à l'intervalle défini par u doit être estimé et donné. Dans de nombreux cas, la confiance p est quelque peu incertaine, non seulement en raison d'une connaissance limitée de la distribution de Y, mais aussi à cause de l'incertitude $u_c(Y)$ elle-même.

Choix d'un facteur d'élargissement

La valeur du coefficient d'élargissement k est choisie sur la base du niveau de confiance requis pour l'intervalle $[y - U(Y)\,;\, y + U(Y)]$. En général, k sera compris entre 2 et 3.

Idéalement, il faudrait choisir k de telle sorte que l'intervalle $[y - U(Y)\,;\, y + U(Y)]$ corresponde à un niveau de confiance particulier tel que 95 %, 90 % ou 99 %. De manière équivalente, pour une valeur donnée de k, il faudrait pouvoir lui associer un niveau de confiance. Cela n'est pas facile en général car cela nécessite une connaissance étendue de la loi de probabilité de Y.

Dans les situations de mesurage où la loi de probabilité caractérisée par Y et $u_c(Y)$ est approximativement normale et où le nombre effectif de degrés de liberté de $u_c(Y)$ est significativement grand. Lorsque c'est le cas, ce qui arrive fréquemment en pratique, on peut supposer que le choix de $k = 2$ fournit un intervalle ayant un niveau de confiance de 95 % environ et que le choix de $k = 3$ fournit un intervalle ayant un niveau de confiance de 99 % environ.

e. Expression de l'incertitude

On écrira par exemple :

> $m_S = 100{,}021\,47$ g avec une incertitude-type composée $u_c = 0{,}35$ mg.
>
> $m_S = 100{,}021\,47\ (35)$ g où le nombre entre parenthèses est la valeur numérique de l'incertitude-type composée u_c qui porte sur les deux derniers chiffres correspondants du résultats fourni.

L'expression de la valeur Y avec son incertitude élargie U est énoncée sous la forme $Y = y \pm U$.

> $m_S = (100{,}021\,47 \pm 0{,}000\,79)$ g où le nombre qui suit le symbole $\pm$ est la valeur numérique de l'incertitude élargie $U = k\, u_c$ avec l'incertitude composée $u_c = 0{,}35$ mg et le facteur d'élargissement $k = 2{,}26$ sur la base de la loi de t pour 9 degrés de liberté, intervalle estimé avoir un niveau de confiance de 95 %.

Cas où l'incertitude n'est pas exprimée littéralement

En l'absence de l'expression littérale d'une incertitude-type ou d'une incertitude élargie, l'expression d'une valeur numérique donnée avec plusieurs chiffres indique généralement que l'incertitude est inférieure à une demi-unité du dernier ordre exprimé.

Exemples 11 :

$l = 1{,}35$ m signifie généralement que la longueur mesurée est comprise entre 1,345 m et 1,355 m.

$m = 330$ kg signifie généralement que la masse considérée est comprise entre 329,5 kg et 330,5 kg.

Lorsque l'ordre de grandeur à exprimer est tel que l'expression avec une unité déterminée conduirait à faire suivre les chiffres significatifs de un ou plusieurs zéros, il est préférable, pour ne pas risquer de faire attribuer indûment une valeur significative à ce ou ces zéros, d'utiliser l'écriture avec puissances de 10, ou encore d'utiliser un multiple de l'unité initiale.

Exemple 12 :

Pour désigner une longueur comprise entre 425 m et 435 m, ne pas écrire 430 m (qui signifierait que la longueur est comprise entre 429, 5 m et 430,5 m) à un certain niveau de confiance) mais $l = 4{,}3 \times 10^2$ m où $l = 0{,}43$ km.

Annexe : Quelques démonstrations mathématiques

Pour une variable aléatoire X de densité f, le calcul de l'espérance (ou moyenne) se fait avec la formule :

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f(t)\, \mathrm{d}t.$$

La variance de X est : $\mathrm{V}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \mathrm{E}(X))^2 f(t)\, \mathrm{d}t.$

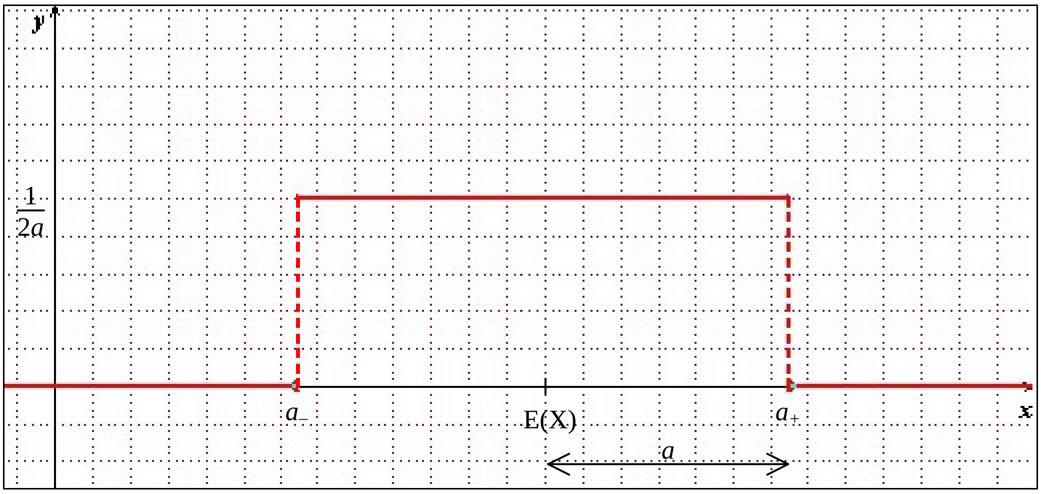
Le carré vient du fait que la variance est une moyenne quadratique (moyenne de carrés) des écarts.
On peut aussi calculer la variance de X avec la formule de Koenig qui simplifie les calculs :

$$\mathrm{V}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\, \mathrm{d}t - (\mathrm{E}(X))^2.$$

C'est un transformation purement calculatoire de la précédente, on développe le carré dans l'intégrale et on coupe en trois morceaux...
L'écart type de X est $\sigma = \sqrt{\mathrm{V}(X)}$.

Pour une distribution rectangulaire :

La fonction densité est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a_- \\ \dfrac{1}{2a} & \text{si } a_- \leq x \leq a_+ \\ 0 & \text{si } x > a_+ \end{cases}$ p avec $a = \dfrac{a_+ - a_-}{2}$.



La valeur maximale de f est $\dfrac{1}{2a}$ de sorte que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \mathrm{d}t = 1$.

Soit X une variable aléatoire de densité f.

L'espérance de X est $\mathrm{E}(X) = \displaystyle\int_{a_-}^{a_+} \frac{t}{2a}\, \mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{4\,a}\right]_{a_-}^{a_+} = \frac{a_+^2 - a_-^2}{4\,a} = \frac{2\,(a_+ - a_-)\,(a_+ + a_-)}{4\,(a_+ - a_-)} = \frac{a_+ + a_-}{2}.$

La variance de X est $\mathrm{V}(X) = \displaystyle\int_{a_-}^{a_+} \frac{t^2}{2a}\, \mathrm{d}t - (\mathrm{E}(X))^2 = \left[\frac{t^3}{6\,a}\right]_{a_-}^{a_+} - \left(\frac{a_+ + a_-}{2}\right)^2 = \frac{a_+^3 - a_-^3}{6\,a} - \left(\frac{a_+ + a_-}{2}\right)^2$

Ainsi $\mathrm{V}(X) = \dfrac{2\,(a_+ - a_-)\,(a_+^2 + a_+a_- + a_-^2)}{6\,(a_+ - a_-)} - \left(\dfrac{a_+ + a_-}{2}\right)^2 = \dfrac{a_+^2 + a_+a_- + a_-^2}{3} - \dfrac{a_+^2 + 2a_+a_- + a_-^2}{4}$

$= \dfrac{a_+^2 - 2a_+a_- + a_-^2}{12}$

D'où $\mathrm{V}(X) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{a_+ - a_-}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2}{3}$. L'écart-type est donc $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Comme l'incertitude est l'écart type de la distribution des valeurs, on a : $u(X) = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Pour une distribution triangulaire :

La fonction densité est la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a_- \\ \dfrac{x - a_-}{a^2} & \text{si } a_- \leq x \leq a_- + a \\ \dfrac{a_+ - x}{a^2} & \text{si } a_- + a \leq x \leq a_+ \\ 0 & \text{si } x > a_+ \text{p} \end{cases} \quad \text{avec } a = \frac{a_+ - a_-}{2}.$$

La valeur maximale de g est $\dfrac{1}{a}$ de sorte que $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

Soit Y une variable aléatoire de densité g.

L'espérance de Y est :

$$\mathrm{E}(Y) = \int_{a_-}^{\frac{a_+ + a_-}{2}} \frac{t\,(t - a_-)}{a^2}\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{a_+ + a_-}{2}}^{a_+} \frac{t\,(a_+ - t)}{a^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{2\,t^3 - 3\,t^2 a_-}{6\,a^2}\right]_{a_-}^{\frac{a_+ + a_-}{2}} + \left[\frac{3\,t^2 a_+ - 2\,t^3}{6\,a^2}\right]_{\frac{a_+ + a_-}{2}}^{a_+}$$

Ainsi $6\,a^2\,\mathrm{E}(Y) = \frac{2}{8}s^3 - \frac{3}{4}s^2 a_- - 2\,a_-^3 + 3\,a_-^3 + 3\,a_+^3 - 2\,a_+^3 - \frac{3}{4}s^2 a_+ + \frac{2}{8}s^3$ avec $s = a_+ + a_-$

$$6\,a^2\,\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{2}s^3 - \frac{3}{4}s^2\,(a_+ + a_-) + a_-^3 + a_+^3 = \frac{1}{2}s^3 - \frac{3}{4}s^3 + a_-^3 + a_+^3 = -\frac{1}{4}s^3 + a_-^3 + a_+^3$$

D'où $24\,a^2\,\mathrm{E}(Y) = 4\,a_-^3 + 4\,a_+^3 - a_+^3 - 3\,a_+^2\,a_- - 3\,a_+\,a_-^2 - a_-^3 = 3\,(a_+^3 - a_+^2\,a_- - a_+\,a_-^2 + a_-^3)$

D'où $8\,a^2\,\mathrm{E}(Y) = a_+^2\,(a_+ - a_-) - a_-^2(a_+ - a_-) = (a_+^2 - a_-^2)\,(a_+ - a_-) = (a_+ + a_-)\,(a_+ - a_-)^2 = (a_+ + a_-) \times (2\,a)^2$.

On en déduit que $\mathrm{E}(Y) = \dfrac{a_+ + a_-}{2}$.

La variance de Y est $\mathrm{V}(Y) = \displaystyle\int_{a_-}^{\frac{a_+ + a_-}{2}} \frac{t^2\,(t - a_-)}{a^2}\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{a_+ + a_-}{2}}^{a_+} \frac{t^2\,(a_+ - t)}{a^2}\,\mathrm{d}t - (\mathrm{E}(Y))^2$

Soit $\mathrm{V}(Y) = \displaystyle\int_{a_-}^{\frac{a_+ + a_-}{2}} \frac{t^2\,(t - a_-)}{a^2}\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{a_+ + a_-}{2}}^{a_+} \frac{t^2\,(a_+ - t)}{a^2}\,\mathrm{d}t - \left(\frac{a_+ + a_-}{2}\right)^2 \int_{a_-}^{\frac{a_+ + a_-}{2}} \frac{t^2\,(t - a_-)}{a^2}\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{a_+ + a_-}{2}}^{a_+} \frac{t^2\,(a_+ - t)}{a^2}\,\mathrm{d}t$

$$\mathrm{V}(Y) = \left[\frac{3\,t^4 - 4\,t^3 a_-}{12\,a^2}\right]_{a_-}^{\frac{a_+ + a_-}{2}} + \left[\frac{4\,t^3 a_+ - 3\,t^4}{12\,a^2}\right]_{\frac{a_+ + a_-}{2}}^{a_+}$$

$$\mathrm{V}(Y) = \frac{1}{12\,a^2}\left(\frac{3}{16}s^4 - \frac{4}{8}s^3 a_- - 3\,a_-^4 + 4\,a_-^4 + 4\,a_+^4 - 3\,a_+^4 - \frac{4}{8}s^3 a_+ + \frac{3}{16}s^4\right)$$

$$\mathrm{V}(Y) = \frac{1}{12\,a^2}\left(\frac{3}{8}s^4 - \frac{4}{8}s^3\,(a_+ + a_-) + a_-^4 + a_+^4\right) = \frac{1}{12\,a^2}\left(-\frac{1}{8}s^4 + a_-^4 + a_+^4\right)$$

D'où $96\,a^2\,\mathrm{V}(Y) = -\,s^4 + 8\,{a_-}^4 + 8\,{a_+}^4 - 6\,(a_+ - a_-)^2\,(a_+ + a_-)^2 = -\,s^4 + 8\,{a_-}^4 + 8\,{a_+}^4 - 6\,({a_+}^2 - {a_-}^2)^2$

$96\,a^2\,\mathrm{V}(Y) = -\,{a_+}^4 - 4\,{a_+}^3\,a_- - 6\,{a_+}^2\,{a_-}^2 - 4\,a_+\,{a_-}^3 - {a_-}^4 + 8\,{a_-}^4 + 8\,{a_+}^4 - 6\,{a_+}^4 + 12\,{a_+}^2\,{a_-}^2 - 6{a_-}^4$

$96\,a^2\,\mathrm{V}(Y) = {a_+}^4 - 4\,{a_+}^3\,a_- + 6\,{a_+}^2\,{a_-}^2 - 4\,a_+\,{a_-}^3 + {a_-}^4 = (a_+ - a_-)^4 = 16\,a^4$

D'où $\mathrm{V}(Y) = \dfrac{a^2}{6}$. L'écart-type de Y est donc $\dfrac{a}{\sqrt{6}}$.

Comme l'incertitude est l'écart type de la distribution des valeurs, on a : $u(X) = \dfrac{a}{\sqrt{6}}$.