Modélisation des erreurs de mesures

Introduction

"Les grandeurs analysées en physique et chimie … sont connues par des mesures dont la précision est limitée … Evaluer l'ordre de grandeur de l'erreur commise sur une mesure, autrement dit, s'intéresser à l'incertitude qui lui est liée, doit, de temps en temps, faire partie de l'activité des élèves."
Ce texte est extrait d'un document de dix pages, intitulé "Erreurs et incertitudes en Physique-Chimie au Collège" disponible à l'adresse suivante. Il s'agit d'un texte d'orientation élaboré par le groupe physique-chimie de l'Inspection générale concernant l'enseignement de la physique et la chimie au collège. http://www.educnet.education.fr/phy/igen/erreurs.htm.
L'objectif est d'introduire une nouvelle approche du calcul des incertitudes absolues ou relatives reposant sur un raisonnement probabiliste (modélisation par la loi Normale).

Sur ce sujet, un très intéressant article de 17 pages intitulé "Incertitudes des mesures de grandeur" de C. Robert et J. Treiner fait partie du document intitulé "Statistique", Commission de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques, rapport adopté le 15 mars 2003, disponible sur le site de la Société Mathématique de France (53 pages) :
http://smf.emath.fr/Enseignement/CommissionKahane/RapportStatistiqueProba/Statistique-annexe.pdf.

La loi de Laplace-Gauss (ou loi Normale), émerge au début du XIXème siècle :
- d'une part, dans le cadre de la théorie des erreurs de mesure, apparaît le triptyque "critère des moindres carrés", "résumé numérique par la moyenne arithmétique" et " modélisation de la loi des erreurs de mesure par la loi normale",
- d'autre part dans le théorème central limite.

Cf. le chapitre "Grande et petite histoire de la statistique" dans "Enseigner la statistique au lycée : des enjeux aux méthodes" de J.-L. Piednoir et Ph. Dutarte, IREM Paris-Nord, 2001 ou "La théorie des erreurs (1750-1820), enjeux, problématiques, résultats" de M. Armatte dans "Histoires de probabilités et de statistiques", IREM Histoire des Mathématiques, Ellipses, 2004.

Modélisation des erreurs de mesures

A. Cas d'une mesure

On note α une grandeur et x une mesure de α sur laquelle est affectée une *incertitude* notée Δx. On note e l'erreur de mesure : $e = x - \alpha$.

Anciens programmes :

"on considère que Δx est un majorant de l'erreur de mesure, c'est-à-dire, on suppose que l'erreur de mesure e appartient à l'intervalle $[-\Delta x\,;\,\Delta x]$".

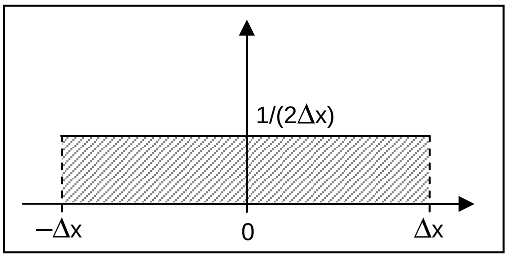
Nouveaux programmes

On considère que l'erreur de mesure e appartient à l'intervalle $[-\Delta x\,;\,\Delta x]$ avec une probabilité assez forte décidée à l'avance, par exemple 95%.

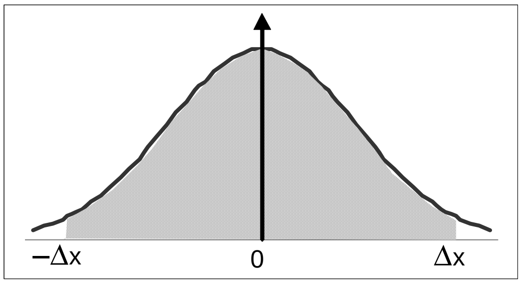
Commentaires
Plus exactement, on considère que l'erreur commise e est l'observation d'une variable aléatoire vérifiant cette propriété et donc que la mesure $x = \alpha + e$ est l'observation d'une variable aléatoire X vérifiant $P(\alpha - \Delta x < X \leq \alpha + \Delta x) = 0.95$.

On en déduit que la vraie valeur α appartient à l'intervalle $\left[x - \Delta x\,;\, x + \Delta x\right]$ avec une "confiance" de 95% (quand on ne peut plus parler de probabilité, on parle de confiance). Il s'agit de l'estimation de α par intervalle de confiance à 95% à partir d'une seule mesure x.

Anciens programmes | *Nouveaux programmes*



Loi uniforme sur $\left[-\Delta x, \Delta x\right]$
L'aire de la surface hachurée est égale à 1.



Loi de Laplace-Gauss (ou Normale)
L'aire de la surface sous la courbe est égale à 1.
L'aire de la surface hachurée est égale à 0.95.

B. Cas de deux mesures
On considère deux grandeurs α et β de même nature et on suppose que les mesures x et y de α et β soient observées dans les mêmes unités de mesure, "indépendamment l'une de l'autre", et affectées des incertitudes Δx et Δy (la mention "indépendamment l'une de l'autre" est là pour s'autoriser une modélisation probabiliste à l'aide de v.a.r. indépendantes en probabilité).

Anciens programmes
Si α appartient à l'intervalle $\left[x - \Delta x\,; x + \Delta x\right]$ et β appartient à l'intervalle $\left[y - \Delta y\,; y + \Delta y\right]$ alors $\alpha + \beta$ appartient à l'intervalle $\left[(x+y) - (\Delta x + \Delta y)\,; (x+y) + (\Delta x + \Delta y)\right]$, c'est-à-dire, l'erreur de mesure sur la somme : $(x+y) - \alpha + \beta$ appartient à l'intervalle $\left[-(\Delta x + \Delta y)\,; \Delta x + \Delta y\right]$.

Nouveaux programmes
Si α appartient à l'intervalle $\left[x - \Delta x\,; x + \Delta x\right]$ avec probabilité 95% et β appartient à l'intervalle $\left[y - \Delta y\,; y + \Delta y\right]$ avec probabilité 95% alors $\alpha + \beta$ appartient à l'intervalle $\left[(x+y) - \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\,; (x+y) + \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right]$ avec probabilité 0.95.

C. Cas de deux mesures d'une même grandeur

Supposons que l'on ait deux mesures x_1 et x_2 de la même grandeur α observées "indépendamment l'une de l'autre dans les mêmes conditions" (cette périphrase pour faire l'hypothèse, dans le cadre d'une modélisation probabiliste, que les deux observations proviennent de deux v.a.r. indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.))

Nouveaux programmes

Le résultat précédent permet d'écrire :

que 2α appartient à l'intervalle $\left[(x_1+x_2)-\sqrt{2}\ \Delta x\,;(x_1+x_2)+\sqrt{2}\ \Delta x\right]$ avec probabilité 95%

et que α appartient à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}(x_1+x_2)-\frac{\Delta x}{\sqrt{2}}\ ;\frac{1}{2}(x_1+x_2)+\frac{\Delta x}{\sqrt{2}}\right]$ avec probabilité 95%

La précision de l'estimation est meilleure en prenant la moyenne des deux mesures qu'une seule mesure.

D. Cas de n mesures d'une même grandeur

Supposons que l'on ait n mesures $x_1, ..., x_n$ de la même grandeur α observées "indépendamment et dans les mêmes conditions". On pose $\overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

Nouveaux programmes

La généralisation du résultat précédent permet d'écrire que α appartient à l'intervalle $\left[\overline{x}_n-\frac{\Delta x}{\sqrt{n}}\ ;\overline{x}_n+\frac{\Delta x}{\sqrt{n}}\right]$ avec probabilité 95%.