VARIABLES ALÉATOIRES

(Ω, P) est un espace probabilisé.

A - Définitions

1°) - Variable aléatoire

Une **variable aléatoire réelle** (v.a.r.) X sur Ω est une application de Ω dans $\mathbb{R}$.

L'**univers image** par X est l'ensemble des images des éléments de Ω par X, ou l'ensemble image de X, ou l'ensemble des valeurs prises par X, on le note $X(\Omega)$. On le note $X(\Omega)$. S'il est dénombrable, la variable aléatoire X est dite **discrète**, dans le cas contraire, elle est dite **continue**.

2°) - Loi de probabilité

X est une variable aléatoire définie sur Ω.

La **loi de probabilité** (ou distribution) de X est la probabilité P_0 définie sur $X(\Omega)$ par :

$$\mathrm{P}_0(B)=\mathrm{P}\left(X^{-1}(B)\right) = \mathrm{P}(X \in B) \text{ pour tout } B \text{ est un intervalle de } X(\Omega).$$

3°) - Fonction de répartition

a) - Définition

La **fonction de répartition** de X est l'application numérique F définie par :

$$F(\mathrm{x}) = \mathrm{P}_0\left(]-\infty, x]\right) = \mathrm{P}\left(X\in]-\infty , x]\right) = \mathrm{P}\left(X \leq x\right).$$

b) - Propriétés

– La fonction de répartition est positive.

– La fonction de répartition est croissante.

– La fonction de répartition a pour limite 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$.

– Pour tous réels a et b tels que $\mathrm{a} \leq \mathrm{b}$, $\mathrm{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$.

B - Variables aléatoires continues

Dans ce paragraphe, X est une v.a.r. continue sur Ω.

I - Généralités

1°) - Densité

a) - Définition

On détermine la loi de probabilité de certaines variables aléatoires continues par leur **densité**. C'est une fonction f intégrable sur $\mathbb{R}$, telle que $f \geq 0$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

$$F(x) = \mathrm{P}\left(]-\infty, x]\right) = \mathrm{P}\left(X\in]-\infty , x]\right) = \mathrm{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

b) - Propriétés

– Si f est continue sur $\mathbb{R}$, F est une primitive de f.

– Pour tous a et b réels tels que $a \leq b$: $\mathrm{P}[a < X \leq b] = F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$.

2°) - Espérance

a) - Définition

L'espérance mathématique de la variable aléatoire réelle X de densité f est : $\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, \mathrm{f}(t)\, \mathrm{d}t$.

b) - Propriétés

a et b sont des réels, X et Y sont des variables aléatoires sur (Ω, P).

- $\mathrm{E}(a X + b Y) = a\,\mathrm{E}(X) + b\,\mathrm{E}(Y)$.
- $\mathrm{E}(a) = a$.

3°) - Écart-type

a) - Définitions

La variance de la variable aléatoire réelle X de densité f est : $\mathrm{V}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(t - \mathrm{E}(X)\big)^2 f(t)\, \mathrm{d}t$ et son écart type est $\sigma = \sqrt{\mathrm{V}(X)}$.

b) - Propriétés

Formule de Koenig : $\mathrm{V}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\, \mathrm{d}t - \big(\mathrm{E}(X)\big)^2$.

Liens avec les opérations : a et b sont des réels, X est une variable aléatoire sur (Ω, P).

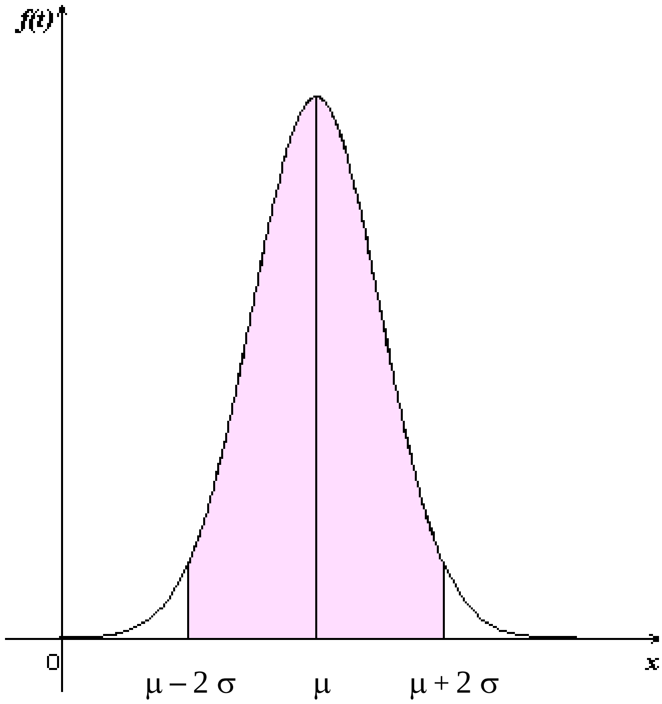
$\mathrm{V}(aX + b) = a^2\,\mathrm{V}(X)$ et $\sigma(aX + b) = |a|\,\sigma(X)$.

II - Exemples

1°) - Lois normales

a) - Définition

On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi normale** de paramètres μ et σ, notée $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, si elle admet pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(\mathrm{t}) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}$

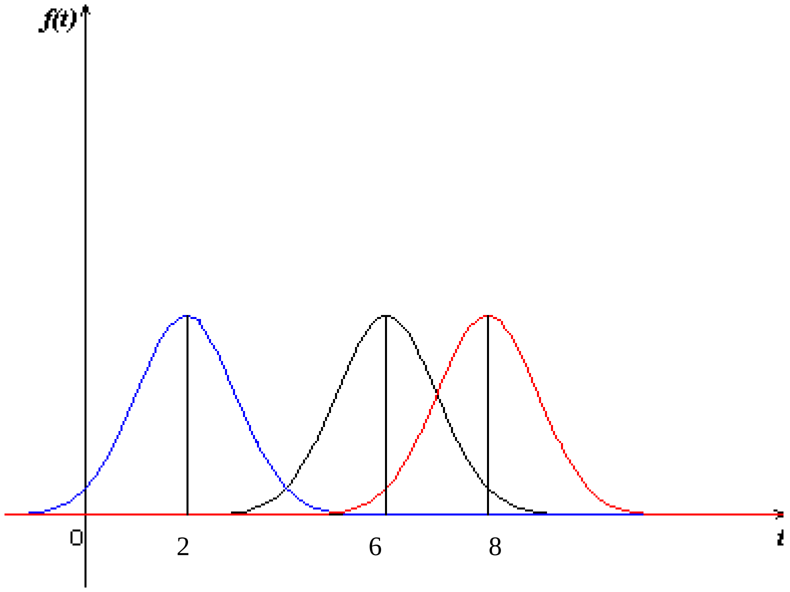


b) - Propriétés

L'espérance mathématique de X est $\mathrm{E}(X) = \mu$. Sa variance est $\mathrm{V}(X) = \sigma^2$ et donc son écart type est σ.

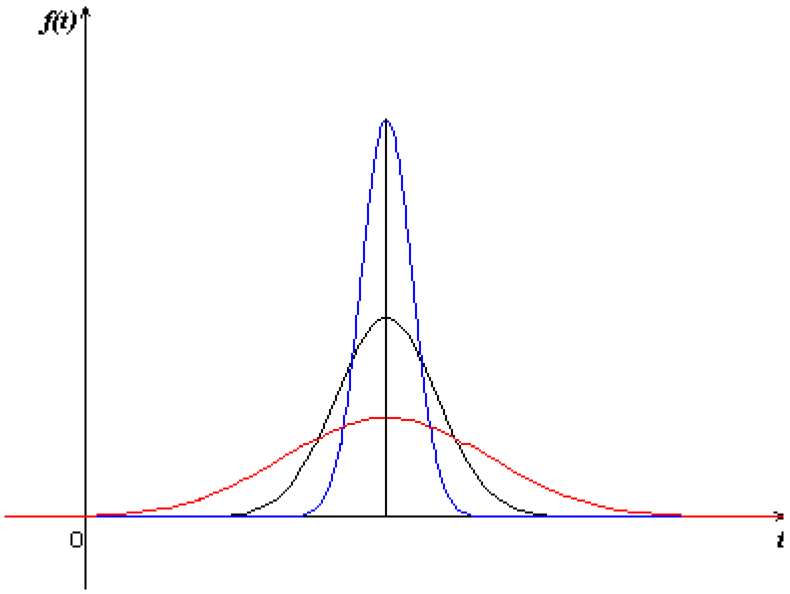
Ainsi si $\mu = 0$ et $\sigma = 1$, X suit la loi normale centrée réduite.

Les lois normales interviennent très souvent et en particulier lorsque le phénomène étudié est la résultante de nombreux paramètres (commerce : fluctuation des ventes, industrie : diamètres de pièces usinées qui sont la résultante de la qualité des matières premières, du réglage de la machine, de l'usure de l'outil, de la température...)



Densités des lois normales

$\mathcal{N}(2\,,1)$, $\mathcal{N}(6\,,1)$, $\mathcal{N}(8\,,1)$



Densités des lois normales

$\mathcal{N}(6\,,1)$, $\mathcal{N}(6\,,2)$, $\mathcal{N}(6\,,0{,}5)$

c) - Théorème

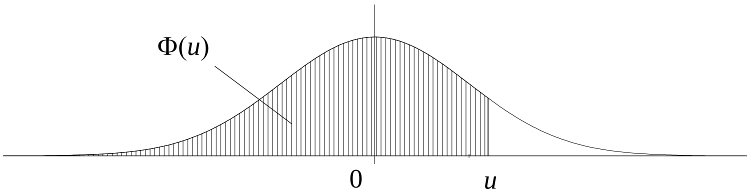
Si X suit la loi normale de paramètres m et σ, alors $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.

Ce résultat est important car il déduit l'étude des lois normales de celle de la loi normale centrée réduite.

Loi normale centrée réduite

U est une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

Le tableau donne des valeurs de la fonction de répartition Φ de *U* : $\Phi(u) = P(U \leq u)$:



u	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Grandes valeurs de *u*

u	3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	4	4,5
Φ(*u*)	0,998650	0,999032	0,999313	0,999517	0,999663	0,999767	0,999841	0,999892	0,999928	0,999968	0,999997